



UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

FLUCTUACIONES GRAVITACIONALES EN ESPACIOTIEMPOS PARED DE DOMINIO

Susana B. Zoghbi V.

Barquisimeto, Diciembre 2006



UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

FLUCTUACIONES GRAVITACIONALES EN ESPACIOTIEMPOS PARED DE DOMINIO

Autor: Susana B. Zoghbi V.
Tutor: Rommel Guerrero

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" como requisito parcial para optar al título de Magister Scientiarum en Ciencias, mención Física-Matemática.

Barquisimeto, Diciembre 2006

Resumen

En este trabajo se estudia el espectro de fluctuaciones gravitacionales en espaciotiempos Pared de Dominio con curvaturas asintóticas diferentes, encontrando que siempre es posible localizar el modo cero sobre la pared, a diferencia de los modos masivos, los cuales se propagan libremente a lo largo de todo el *bulk* 5-dimensional.

Palabras Claves: paredes de dominio, paredes dobles, paredes irregulares, branas con expansión *de Sitter*, branas asimétricas, fluctuaciones gravitacionales, localización de gravedad.

Índice general

Introducción	IV
1. Sistema Einstein-Campo Escalar y Paredes de Dominio	1
1.1. Sistema Einstein-Campo Escalar	1
1.2. Paredes de Dominio	1
1.3. Simplificación del Sistema Einstein - Campo Escalar	2
1.4. Curvatura del <i>Bulk</i>	3
1.5. Teoría de Gravitación de Einstein sobre la Pared de Dominio	3
2. Soluciones Regulares tipo Pared de Dominio	6
2.1. Solución dinámica con expansión dS	6
2.2. Solución estática	8
3. Método para hallar nuevas soluciones	11
4. Generando Nuevas Soluciones	13
4.1. Nuevas soluciones dinámicas con expansión dS	13
4.1.1. Solución irregular	13
4.1.2. Solución general	15
4.2. Nuevas soluciones estáticas	17
4.2.1. Solución irregular	17
4.2.2. Solución general	18
5. Espectro de Fluctuaciones Gravitacionales	21
5.1. Perturbaciones Gravitacionales	21
5.2. Modo cero del espectro gravitacional	24
5.2.1. Localización del modo cero sobre pared dinámica con expansión dS asimétrica	24
5.2.2. Localización del modo cero sobre pared estática asimétrica	25
5.3. Espectro gravitacional de soluciones dinámicas en el límite de pared delgada	25
5.3.1. Solución particular dinámica con expansión dS	26
5.3.2. Solución general dinámica con expansión dS	28
Conclusiones	31
Apéndices	31

A. La estructura más general de la Métrica	32
B. Soluciones a la Ecuación de Sturm-Liouville	34
C. Perturbaciones Gravitacionales	36
C.1. Ecuaciones de Einstein en la forma de Ricci	36
C.2. \tilde{R}_{ab} en función de R_{ab}	36
C.3. Ecuaciones Einstein-Campo Escalar de h_{ab}	38
C.3.1. Desarrollo de $\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \right _{\lambda=0}$	39
C.3.2. Desarrollo de $\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ab} \right _{\lambda=0}$	40
C.3.3. Desarrollo de $\left. -\frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ac} \tilde{T}_b^c \right] \right _{\lambda=0}$	41
C.3.4. Simplificaciones	42
C.3.5. En particular para h_{tt}	42
C.3.6. Generalización	43
D. Autovalores del operador $Q^\dagger Q$	44
E. Límite de pared delgada de soluciones dinámicas	45
E.1. Solución regular	45
E.2. Solución general	45
F. Cálculo de V_{QM} en límite de pared delgada	47
F.1. Solución regular	47
F.2. Solución general	48
Bibliografía	48

Introducción

Los Mundos Branas o hipersuperficies sumergidas en un espacio de alta dimensionalidad; son soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein fenomenológicamente interesantes, pues permiten obtener modelos posibles de nuestro universo.

Entre los modelos más significativos se tiene el presentado por Randall y Sundrum (RS), en el cual se concibe al universo como una hipersuperficie estática 4-dimensional embebida en un espaciotiempo de 5 dimensiones *Anti de Sitter* (*AdS*) [1]. En éste, el potencial gravitacional es definido por dos términos correspondientes al modo cero ψ_0 y los modos masivos ψ_m del espectro gravitacional, respectivamente

$$V(r) = (G_5|\psi_0(0)|^2) \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{|\psi_0(0)|^2} \int_0^{+\infty} dm |\psi_m(0)|^2 e^{-mr} \right). \quad (1)$$

El modo cero es localizado de tal forma que genera un potencial gravitacional tipo Newton sobre la brana. Mientras que los modos masivos, libres a lo largo de todo el espaciotiempo, no proporcionan correcciones significativas al potencial para distancias mayores a $1mm$; en concordancia con las medidas experimentales.

Otros escenarios son las branas dinámicas [2, 3, 4, 5], las cuales corresponden a hojas de mundo con *background* métrico definidas por una expansión *de Sitter* (*dS*), típicas en el marco de la cosmología estándar. Al igual que en el caso estático, en esta geometría, el modo cero define la contribución Newtoniana al potencial y los modos masivos se encuentran libres en el espaciotiempo. Sin embargo, una cualidad intrínseca a estos escenarios, es la existencia de una brecha entre el estado nulo y los masivos continuos del espectro de las fluctuaciones gravitacionales.

No obstante, las branas son construidas mediante una idealización, utilizando estrategias geométricas que requieren considerarlas como regiones del espaciotiempo de infinita densidad de energía. Es decir, por construcción las branas se entienden como paredes de grosor infinitesimal. Esta idealización es necesaria debido a que no se tiene ninguna evidencia de dimensiones adicionales. Una alternativa es proponer modelos donde se toma en cuenta el espesor de la pared, obteniéndose la brana como el límite de pared delgada de la estructura con espesor finito.

Las Paredes de Dominio son soluciones a la teoría de la gravedad de Einstein interactuando con un campo escalar (Einstein-Campo Escalar), donde el campo escalar es un *kink* topológico que interpola entre los mínimos (o vacíos) consecutivos del potencial de autointeracción. La teoría Einstein-Campo Escalar predice cómo evoluciona el espaciotiempo, dada una fuente de deformación del campo gravitacional definida por el campo escalar y consiste de un sistema de ecuaciones acopladas, altamente no lineal, en derivadas parciales

de segundo orden. De tal manera que hallar soluciones exactas a este sistema es un problema no trivial. De hecho, sólo hay dos paredes dinámicas, reportadas en la literatura. La primera de ellas, está sumergida en un espaciotiempo con vacíos Minkowskianos simétricos [6], donde se puede realizar la gravedad 4-dimensional [7] y desarrollar su límite de pared delgada [8]. La segunda [9], está embebida en una variedad asimétrica con curvaturas asintóticas dS y AdS , capaz de confinar el modo cero de las perturbaciones métricas.

Por otra parte, en el contexto de las paredes de dominio estáticas, se tienen diversos ejemplos de paredes simples. Entre ellas, la generada en [10], la cual es simétrica en un espaciotiempo AdS y corresponde a una versión regularizada de la brana RS [8]. Adicionalmente, se tienen paredes de dominio dobles. Esto es, soluciones que albergan una estructura interna, representando dos sub-paredes paralelas [11, 12, 9]. Un ejemplo de ellas consta de un escenario sumergido en un *bulk* con simetría Z_2 y vacíos AdS reportada en [12], la cual es una generalización de la solución de [10]. Otro ejemplo, presentado en [9], es una pared doble inmersa en un *bulk* asimétrico con curvaturas asintóticas AdS , capaz de localizar el modo cero del espectro gravitacional.

Los objetivos de este trabajo están centrados fundamentalmente en analizar los efectos gravitacionales generados al introducir arbitrariamente asimetrías sobre espaciotiempos tipo pared de dominio.

Se mostrará que, en general, la teoría resultante sobre la pared corresponde a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica; garantizando que estas estructuras diferenciales representan posibles modelos del universo. Una vez logrado esto, se estudiará la localización del modo cero de las fluctuaciones gravitacionales sobre las estructuras asimétricas con espesor finito descritas en [9], cuyas características fueron brevemente mencionadas en los párrafos anteriores y serán ampliadas a lo largo del trabajo.

El espectro de fluctuaciones gravitacionales se obtendrá aplicando el método expuesto en [13], donde se generaliza, para el sistema Einstein-Campo Escalar, el procedimiento conocido para obtener las desviaciones gravitacionales de una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío [14].

Como último objetivo, se analizará detalladamente el espectro completo de la radiación gravitacional en el límite de pared delgada de las soluciones dinámicas [6, 9], con el fin de verificar la localización del modo cero sobre la brana y la libre propagación de los modos masivos sobre todo el *bulk* 5-dimensional. Estas branas dinámicas son interesantes desde el punto de vista de la cosmología estándar pues corresponden a métricas tipo Friedman-Robertson-Walker.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el primer capítulo se presenta el sistema Einstein-Campo Escalar, la definición de Pared de Dominio, y las curvaturas asociadas al sistema. Adicionalmente, se muestra de manera rigurosa que las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica describen la dinámica de las paredes. En el segundo capítulo, se presentan las características de dos soluciones particulares conocidas: una dinámica [6] y una estática [12]. En el tercer capítulo, se expone un método para hallar nuevas soluciones, a partir de las conocidas [15, 9]. En el cuarto, se emplea este método y se generan dos familias de soluciones nuevas, una irregular [15] y una general [9], para cada una de las estructuras estudiadas en el capítulo 2; obteniéndose, en el caso de las soluciones generales, asimetrías en el sistema. En el capítulo 5, se realizan perturbaciones gravitacionales a la métrica, lo que permite estudiar la localización del modo cero

sobre las estructuras asimétricas. Finalmente, se toma el límite de pared delgada de las soluciones dinámicas y se estudia detalladamente el espectro completo de fluctuaciones gravitacionales.

Capítulo 1

Sistema Einstein-Campo Escalar y Paredes de Dominio

En este capítulo se plantean las ecuaciones del acoplamiento Einstein-Campo Escalar y se realiza un breve resumen acerca de las paredes de dominio. En particular, se presenta su definición formal, las simplificaciones que originan al sistema y las curvaturas asociadas. Adicionalmente, se mostrará que la dinámica de estas estructuras es descrita por la teoría de Einstein con constante cosmológica; garantizando que las configuraciones estudiadas, en el límite de pared delgada, corresponden efectivamente a posibles modelos del universo.

1.1. Sistema Einstein-Campo Escalar

El Sistema Einstein acoplado al Campo Escalar es un conjunto no lineal de ecuaciones diferenciales acopladas en derivadas parciales, formado por

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab} , \quad (1.1)$$

$$T_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi - g_{ab} \left[\frac{1}{2}\nabla_d\phi\nabla^d\phi + V(\phi) \right] , \quad (1.2)$$

$$\nabla_d\nabla^d\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 , \quad (1.3)$$

donde G_{ab} es el Tensor de Einstein; T_{ab} es el Tensor Energía-Impulso¹ y representa la fuente del campo gravitacional dado por el campo escalar ϕ con potencial de autointeracción $V(\phi)$; g_{ab} es el tensor métrico del sistema y representa la geometría del espaciotiempo; R_{ab} es el Tensor de Ricci y R es el Escalar de Curvatura (o Escalar de Ricci) .

1.2. Paredes de Dominio

Una Pared de Dominio es una solución al Sistema Einstein-Campo Escalar, donde el campo escalar es función únicamente de la dimensión extra, $\phi = \phi(\xi)$, e interpola

¹El símbolo $\nabla_a\phi$ denota la derivada covariante con respecto a x^a del campo escalar y, como éste no depende de los vectores base, la derivada covariante es igual a la derivada parcial $\nabla_a\phi = \partial\phi/\partial x^a$.

asintóticamente entre dos valores, φ_{\pm} , que corresponden a los mínimos (o vacíos) consecutivos del potencial de autointeracción, $V(\phi)$. Es decir, cuando $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = \varphi_{\pm}$, entonces $\lim_{\phi \rightarrow \varphi_{\pm}} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0$.

1.3. Simplificación del Sistema Einstein - Campo Escalar

Se desea resolver el Sistema de Einstein acoplado a Campo Escalar, formado por (1.1), (1.2) y (1.3) cumpliendo con condiciones que definen a una pared de dominio:

- i* El campo escalar sólo depende de la coordenada adicional $\phi = \phi(\xi)$.
- ii* El campo escalar interpola suavemente entre los mínimos del potencial, cumpliéndose que cuando $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = \varphi_{\pm}$, entonces $\lim_{\phi \rightarrow \varphi_{\pm}} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0$, $\varphi_{\pm} \in \mathfrak{R}$.
- iii* Existe simetría plano paralela, es decir, la geometría del espaciotiempo puede ser descrita en coordenadas cartesianas [16].

Bajo estas condiciones, la forma más general del tensor métrico ² en un espaciotiempo de 5 dimensiones está dado por

$$g_{ab} = f^2(\xi) \left(-dt_a dt_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_b^i \right) + f^2(\xi) d\xi_a d\xi_b, \quad (1.4)$$

donde $a, b = 0, \dots, 4$; x^i son las coordenadas espaciales con $i = 1, 2, 3$; y ξ es la coordenada espacial adicional. Además, si $\beta > 0$ se tiene una pared dinámica, mientras si $\beta = 0$, se tiene una pared estática.

Para esta métrica se contruyen las componentes del tensor de Einstein ³

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{3}{f^2} \left[\frac{f''}{f} - \beta^2 \right], & G_{\xi}^{\xi} &= \frac{6}{f^2} \left[\frac{f'^2}{f^2} - \beta^2 \right], \\ G_1^1 &= \frac{3}{f^2} \left[\frac{f''}{f} - \beta^2 \right], & G_2^2 &= G_3^3 = G_1^1; \end{aligned} \quad (1.5)$$

y las componentes del tensor Energía-Impulso

$$\begin{aligned} T_t^t = -\rho &= -\frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), & T_{\xi}^{\xi} = -P &= \frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), \\ T_1^1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), & T_2^2 &= T_3^3 = T_1^1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde T_t^t y T_{ξ}^{ξ} se interpretan como la densidad de energía ρ , y la densidad de presión P con signo opuesto, respectivamente.

² La estructura de (1.4) proviene de considerar una métrica aún más general. Ver detalles en el Apéndice A

³ Las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada adicional ξ , y los puntos denotan derivadas con respecto al tiempo.

En (1.5) y (1.6) se aprecia que es posible simplificar el sistema, tomando la suma $G_t^t + G_\xi^\xi = T_t^t + T_\xi^\xi$, obteniéndose

$$\phi'^2 = 3 \left[2 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} - \beta^2 \right], \quad (1.7)$$

y tomando la resta $G_t^t - G_\xi^\xi = T_t^t - T_\xi^\xi$, dando lugar a

$$V(\phi) = -\frac{3}{2f^2} \left[2 \frac{f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} - 3\beta^2 \right]. \quad (1.8)$$

Como consecuencia, se ha logrado reducir el sistema Einstein-Campo Escalar a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas (1.7) y (1.8).

1.4. Curvatura del *Bulk*

En este trabajo se estudian paredes de dominio de 4 dimensiones embebidas en un espaciotiempo 5-dimensional, denominado *bulk*. La pared de dominio divide este espaciotiempo en dos subespacios, los cuales pueden ser planos (tipo Minkowski) o tener curvaturas diferentes. Si la curvatura es positiva, se dice que el espaciotiempo es *de Sitter* (*dS*), y si es negativa, el espaciotiempo es *Anti de Sitter* (*AdS*).

La curvatura asintótica del *bulk* se puede determinar evaluando el Tensor Energía-Impulso cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, donde los efectos gravitacionales de la pared son despreciables y sólo queda la contribución de la energía de vacío, asociada al espaciotiempo donde está embebida la pared. Al tomar el límite cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, los dos primeros términos en (1.2) se anulan porque el campo escalar tiende a una constante, $\phi \rightarrow \varphi_\pm$. De tal manera que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} T_{ab} = -g_{ab} \lim_{\phi \rightarrow \varphi_\pm} V(\phi) \quad (1.9)$$

y (1.1) se reduce a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con constante cosmológica Λ ,

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0, \quad \Lambda = \lim_{\phi \rightarrow \varphi_\pm} V(\phi). \quad (1.10)$$

De esta última expresión se desprende que la curvatura del *bulk* también puede ser determinada evaluando el potencial de autointeracción $V(\phi)$ en sus mínimos, esto es, cuando $\phi \rightarrow \varphi_\pm$.

1.5. Teoría de Gravitación de Einstein sobre la Pared de Dominio

El propósito de esta sección es mostrar que la teoría que describe la dinámica de las paredes de dominio corresponde a las ecuaciones de gravitación de Einstein con constante cosmológica. Para ello, considérese el espaciotiempo 4-dimensional sobre la pared

de dominio

$$\hat{g}_{mn} = -dt_m dt_n + e^{2\beta t} (dx_m^i dx_n^i) \quad (1.11)$$

donde $m, n = 0, \dots, 3$. Las componentes diferentes de cero del Tensor de Einstein asociado a (1.11) son

$$\hat{G}_{tt} = 3\beta^2, \quad \hat{G}_{11} = -3\beta^2 e^{2\beta t}, \quad \hat{G}_{22} = \hat{G}_{33} = \hat{G}_{11}. \quad (1.12)$$

De tal manera que se puede escribir

$$\hat{G}_{mn} = -3\beta^2 \hat{g}_{mn}, \quad (1.13)$$

donde el símbolo $\hat{}$ se ha utilizado para denotar las componentes asociadas al espaciotiempo 4-dimensional.

Por otra parte, como se presentó anteriormente, un espaciotiempo en 5 dimensiones es descrito en general por la métrica

$$g_{ab} = f^2(\xi) (-dt_a dt_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_b^i) + f^2(\xi) d\xi_a d\xi_b, \quad (1.14)$$

observándose que

$$g_{mn} = f^2(\xi) \hat{g}_{mn} \quad (1.15)$$

y las componetes diferentes de cero del Tensor de Einstein asociado a (1.14) son

$$G_{tt} = 3\beta^2 - 3\frac{f''}{f}, \quad G_{\xi\xi} = -6\beta^2 f + 6\frac{f'^2}{f^2} \quad (1.16)$$

$$G_{11} = -3\beta^2 e^{2\beta t} + 3e^{2\beta t} \frac{f''}{f}, \quad G_{11} = G_{22} = G_{33}. \quad (1.17)$$

En consecuencia se puede escribir

$$\begin{aligned} G_{mn} &= -3\beta^2 \hat{g}_{mn} + 3\frac{f''}{f} \hat{g}_{mn} \\ &= \hat{G}_{mn} + 3\frac{f''}{f} \hat{g}_{mn}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Adicionalmente, el Tensor Energía-Impulso dado por (1.2) se reduce a

$$T_{mn} = -f^2 \hat{g}_{mn} \left[\frac{1}{2} \frac{\phi'^2}{f^2} + V(\phi) \right]. \quad (1.19)$$

Ahora se pueden construir las ecuaciones de Einstein $G_{mn} = T_{mn}$,

$$\hat{G}_{mn} + 3\frac{f''}{f} \hat{g}_{mn} + f^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\phi'^2}{f^2} + V(\phi) \right] \hat{g}_{mn} = 0. \quad (1.20)$$

Notando que

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\phi'^2}{f^2} + V(\phi) \right] = \frac{3}{f^2} \left[-\frac{f''}{f} + \beta^2 \right],$$

las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$\hat{G}_{mn} + \Lambda_0 \hat{g}_{mn} = 0, \quad \Lambda_0 = 3\beta^2. \quad (1.21)$$

Con esta expresión se demuestra que, efectivamente sobre la pared, el comportamiento del espaciotiempo es descrito por las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica Λ_0 . Así se garantiza que estas estructuras diferenciales representan posibles modelos del universo en el límite de pared delgada.

Como comentario final, es oportuno mencionar que las paredes de dominio son regiones del espaciotiempo que poseen curvatura propia diferente de la del *bulk*, y de (1.21), se lee que ésta es en general $3\beta^2$. En consecuencia, si $\beta > 0$ se tiene una pared dinámica con expansión *de Sitter*, mientras si $\beta = 0$, se tiene una pared estática plana.

Capítulo 2

Soluciones Regulares tipo Pared de Dominio

En el presente capítulo, se exponen dos familias conocidas de soluciones tipo pared de dominio: una dinámica con expansión dS y una estática. Se mostrará que ambas tienen como característica común que el factor métrico es una función suave o regular. Por tal razón se les denomina *paredes de dominio regulares*. A partir de ellas, será posible generar nuevas soluciones, empleando un método soportado en la linealización de las ecuaciones de campo, lo que dará lugar a configuraciones poco convencionales con interesantes propiedades.

2.1. Solución dinámica con expansión dS

En [6], se reporta la primera solución tipo pared de dominio al Sistema Einstein-Campo Escalar, donde el factor *warp* de la métrica (1.4) viene dado por

$$f_1(\xi) = \cosh^{-\delta}(\beta\xi/\delta) , \quad (2.1)$$

siendo δ un parámetro real asociado con el espesor de la pared.

La Figura 2.1 muestra el factor métrico para diferentes valores de δ , evidenciándose que se tiene una función suave o regular; esto es, que tanto la función como sus derivadas (por lo menos hasta el segundo orden) son continuas y derivables. Adicionalmente, se aprecia que a medida que $\delta \rightarrow 0$, el espesor del factor métrico se reduce y la función se agudiza en torno al máximo.

Resolviendo (1.7) y (1.8), se obtienen el campo escalar y el potencial de autointeracción

$$\phi = \phi_0 \arctan[\sinh(\beta\xi/\delta)], \quad \phi_0 = \sqrt{3\delta(1-\delta)}, \quad 0 < \delta < 1/2 , \quad (2.2)$$

$$V_1(\phi) = \frac{3}{2} \frac{\beta^2(1+3\delta)}{\delta} \cos^{2(1-\delta)}(\phi/\phi_0) . \quad (2.3)$$

Se puede verificar que efectivamente el campo escalar interpola entre los mínimos del potencial (característica distintiva de las paredes de dominio), pues cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$,

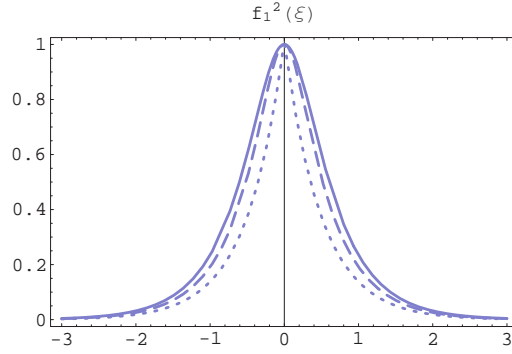


Figura 2.1: Factor Métrico, $f_1^2(\xi)$, para $\delta \rightarrow 0$, $\delta = \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$. En esta gráfica y en las sucesivas el espesor de las líneas aumenta con el incremento de δ .

entonces $\phi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \phi_0$. Estos valores corresponden a los mínimos del potencial siempre y cuando $0 < \delta < 1/2$, tal como se deduce del cálculo de los mínimos del potencial ¹ y como se aprecia gráficamente en la Figura 2.2 para diferentes valores de δ .

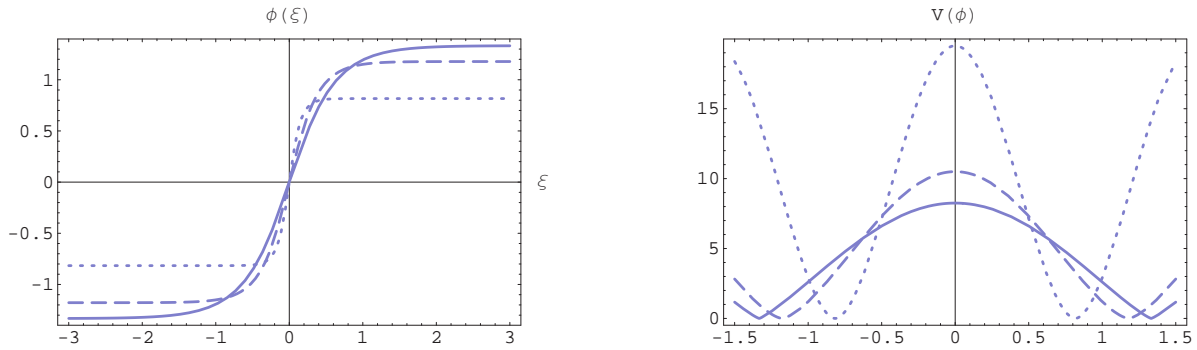


Figura 2.2: Campo Escalar $\phi(\xi)$ (izquierda) y Potencial de Autointeracción $V_1(\phi)$ (derecha), ambas para $\delta = \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$.

Es conveniente notar que $\lim_{\phi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \phi_0} V(\phi) = 0$. En consecuencia, la constante cosmológica asociada al *bulk* de esta solución es $\Lambda = 0$, teniéndose un espaciotiempo plano. La densidad de energía ρ_1 , y la densidad de presión P_1 , se obtienen a partir de (1.6) y se muestran en la Figura 2.3.

$$\rho_1(\xi) = 3\beta^2 \frac{(\delta + 1)}{\delta} \cosh^{2(\delta-1)}(\beta\xi/\delta) , \quad (2.4)$$

$$P_1(\xi) = 6\beta^2 \cosh^{2(\delta-2)}(\beta\xi/\delta) . \quad (2.5)$$

Se advierte, que a medida que $\delta \rightarrow 0$, el valor de la densidad de energía se incrementa y agudiza fuertemente alrededor de $\xi = 0$, lo cual sugiere que existe un objeto cuya energía está altamente concentrada en este punto. Este objeto es la pared de dominio y

¹ En (2.2) se observa que se debe cumplir que $0 < \delta < 1$ para tener un campo escalar real. Sin embargo, cuando se calculan analíticamente los mínimos del potencial $\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \rightarrow \cos^{1-2\delta}(\phi/\phi_0) \sin(\phi/\phi_0) = 0$, se halla una restricción adicional para δ , siendo $0 < \delta < 1/2$.

representaría un posible modelo de nuestro universo, en caso de que se logre confinar la gravedad en ella en el límite de pared delgada. Su estudio se lleva a cabo en la Sección 5.3.1.

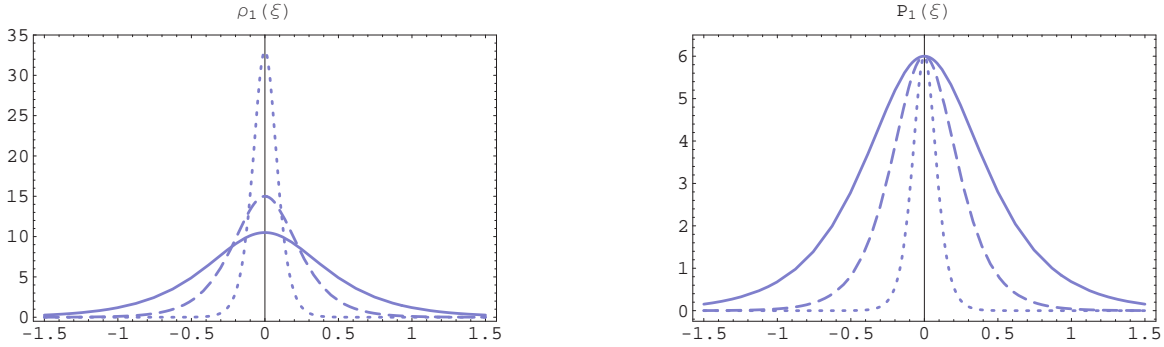


Figura 2.3: Densidad de Energía, $\rho_1(\xi)$ (derecha) y Densidad de Presión $P_1(\xi)$ (izquierda), ambas para $\delta = \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$, y $\beta = 1$, en función de la coordenada adicional.

2.2. Solución estática

Se presenta ahora una familia de soluciones tipo pared de dominio estática ($\beta = 0$), cuyo factor warp fue reportado en [12, 8] y viene dado por

$$f_1(\xi) = [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-\frac{1}{2s}}, \quad (2.6)$$

donde α es una constante y s es el parámetro de la familia de soluciones.

La Figura 2.4 muestra este factor métrico para diferentes valores de s . En particular, para $s = 1$, se tiene el comportamiento convencional en forma de campana, similar a (2.1). Sin embargo, para $s \neq 1$, se presenta una región plana alrededor de $\xi = 0$. Esto sugiere que la geometría del espaciotiempo posee cierta estructura interna en la cercanía a este punto.

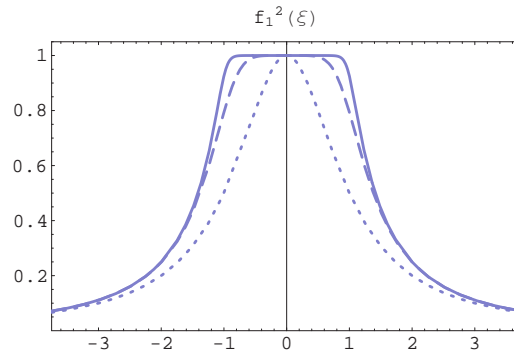


Figura 2.4: Factor Métrico, $f_1^2(\xi)$, para $s = 1, 3, 9$. En esta gráfica y en las sucesivas el espesor de las líneas aumenta con el incremento de s .

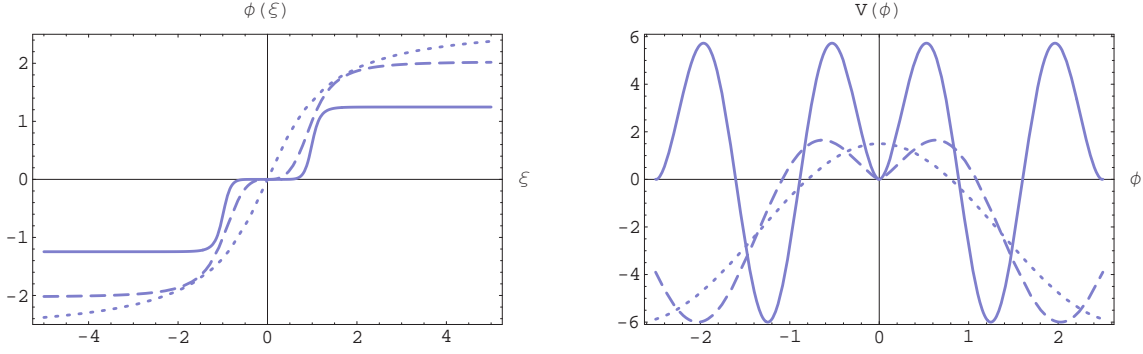


Figura 2.5: Campo Escalar $\phi(\xi)$ (izquierda) y Potencial de Autointeracción $V_1(\phi)$ (derecha), ambas para $s = 1, 3, 9$.

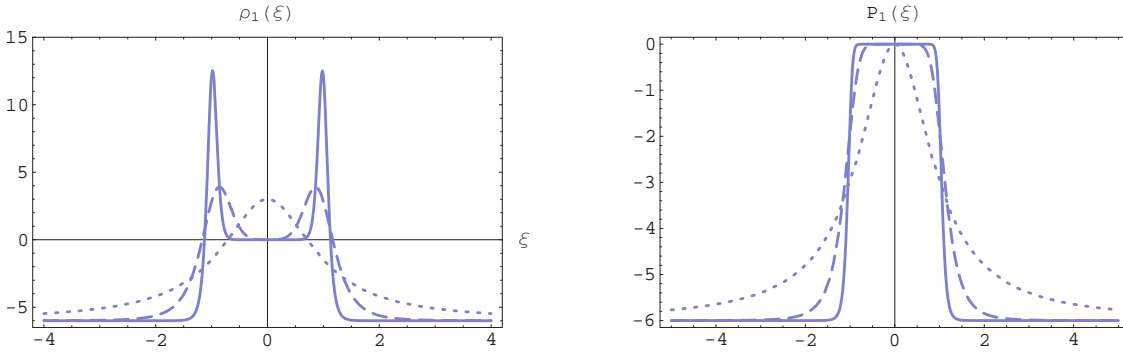


Figura 2.6: Densidad de Energía $\rho_1(\xi)$ (izquierda) y Densidad de Presión $P_1(\xi)$ (derecha), ambas para $s = 1, 3, 9$.

Resolviendo (1.7) y (1.8), se obtienen el campo escalar y el potencial de autointeracción

$$\phi = \phi_0 \arctan(\alpha^s \xi^s), \quad \phi_0 = \frac{\sqrt{3(2s-1)}}{s}, \quad s = 1, 3, 5, \dots \quad (2.7)$$

$$V_1(\phi) + \Lambda = 3\alpha^2 \sin^{2-2/s}(\phi/\phi_0) \left[\frac{(2s+3)}{2} \cos^2(\phi/\phi_0) - 2 \right], \quad (2.8)$$

y se grafican en la Figura 2.5 para diferentes valores de s . Se verifica que el campo escalar interpola entre los mínimos del potencial, tal que cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, entonces $\phi \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}\phi_0$, siempre y cuando s sea un entero impar positivo.²

En particular para $s = 1$, el campo presenta una forma tipo *kink* simple, interpolando suavemente entre $\pm\frac{\pi}{2}\phi_0$, los cuales corresponden precisamente a los mínimos del potencial.

Para otros valores impares (mayores que uno) de s , el campo tiene una forma de *kink* doble y se encuentra que el potencial tiene un mínimo local entre dos mínimos globales. El campo toma valores en el mínimo local en una región cercana al origen; mientras que tiende a los mínimos globales del potencial cuando la coordenada espacial adicional tiende al infinito.

² De (2.7) se desprende que s debe ser entero y $s > 1/2$ para satisfacer $\phi \in \mathfrak{R} \forall \xi$. Además s debe ser impar para interpolar entre mínimos consecutivos del potencial. Para valores pares de s , el campo pierde la forma tipo *kink*, tendiendo a valores iguales cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

A partir de (1.6), se halla la densidad de energía y la densidad de presión

$$\rho_1(\xi) = -3\alpha^2 \xi^{2(s-1)} [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{(1/s-2)} [(1-2s) + 2(\alpha\xi)^{2s}] , \quad (2.9)$$

$$P_1(\xi) = 6\alpha^{4s} \xi^{4s-2} [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{(1/s-2)} . \quad (2.10)$$

En la Figura 2.6, para $s = 1$, se tiene la concentración de energía usual alrededor del origen. Sin embargo, para $s \neq 1$, se tienen dos lugares cercanos al origen donde existe una fuerte concentración de energía, la cual se agudiza a medida que incrementa s . Esto indica que la pared de dominio alberga una estructura interna compuesta de dos subparedes paralelas. A este tipo de solución se le denomina *wall double* y se determina que cada subpared interpola entre un vacío Minkowskiano y un vacío *AdS* con constante cosmológica $\Lambda = -6\alpha^2$.

Capítulo 3

Método para hallar nuevas soluciones

En la la Sección 1.3 se realizó una reducción del sistema Einstein-Campo Escalar, obteniéndose dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para el campo escalar y el potencial de autointeracción, $\{\phi(\xi), V(\phi)\}$. Adviértase que la expresión para hallar el campo

$$\phi'^2 = 3 \left[2 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} - \beta^2 \right] \quad (3.1)$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, y en consecuencia la solución general está compuesta de la superposición lineal de dos soluciones linealmente independientes. Hasta ahora este sistema se ha resuelto parcialmente, pues sólo se tiene una solución particular para cada familia estudiada, (2.1) y (2.6).

El objetivo de este capítulo es mostrar un método para hallar una segunda solución de (3.1) y la solución general del sistema. Para ello, considérese el cambio de variables

$$f = \frac{1}{g} . \quad (3.2)$$

Al sustituir en (3.1) y reagrupando, se tiene

$$g'' - g \left[\frac{1}{3} \phi'^2 + \beta^2 \right] = 0 . \quad (3.3)$$

Realizar este cambio de variables ha permitido linealizar una de las ecuaciones del Sistema Einstein-Campo Escalar, obteniéndose una ecuación diferencial en la forma de Sturm-Liouville.¹ De tal manera que si se conoce una solución particular de (3.3), i.e. g_1 , entonces se puede hallar otra solución linealmente independiente, g_2 , a través de la expresión²

$$g_2(\xi) = g_1(\xi)\chi(\xi), \quad \chi(\xi) = \int^{\xi} \frac{1}{[g_1(x)]^2} dx . \quad (3.4)$$

¹ La ecuación diferencial de Sturm-Liouville en general se escribe como $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dy(x)}{dx} + Q(x)y(x) = r(x)$. En el caso de (3.3), $P(x) = r(x) = 0$ y $Q(x) = [\frac{1}{3}\phi'^2 + \beta^2]$.

² Ver demostración en Apéndice B.

Sustituyendo g_2 en (1.8), se obtiene la expresión para calcular el potencial de autointeracción asociado a la nueva solución

$$V_2(\xi) = -\frac{3}{2}g_2^2(\xi) \left[4\frac{g_2'^2(\xi)}{g_2^2(\xi)} - \frac{g_2''(\xi)}{g_2(\xi)} - 3\beta^2 \right] \quad (3.5)$$

Las ecuaciones (3.4) y (3.5) proporcionan un mecanismo para obtener nuevas soluciones al acoplamiento Einstein-Campo Escalar a partir de una solución conocida, i.e. g_1 , compatible con el mismo campo escalar pero con diferentes potenciales de autointeracción. La función g_2 será una pared de dominio toda vez que el campo escalar ϕ , interpole entre los vacíos del potencial $V_2(\phi)$. Finalmente, la integración completa de (3.3) se logra al obtener la solución general, la cual viene dada por la superposición lineal de g_1 y g_2

$$g(c_1, c_2) = c_1g_1 + c_2g_2, \quad (3.6)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias de integración y el factor métrico correspondiente es $f = \frac{1}{g}$.

Se desea ahora analizar el comportamiento analítico de las soluciones. Para ello, sea g_1 una función tal que

- 1.- g_1 es de clase C^2 , es decir, la derivada de segundo orden existe y es continua.
- 2.- $g_1 > 0$, $\forall \xi \in \mathfrak{R}$ (definida positiva),
- 3.- $g_1 \rightarrow +\infty$ cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

entonces f_1 es una función continua, acotada, integrable y asintóticamente nula, la cual se denomina regular.

Por otra parte, g_2 será una función continua y f_2 tendrá una singularidad para ξ_0 , toda vez que $g_2(\xi_0) = 0$. Al factor métrico f_2 se le llamará irregular.

Por último, g es una función suave con un cero en algún valor de ξ , que corresponde a una singularidad en f , para los siguientes casos:

- 1.- Si $c_1, c_2 \neq 0$, entonces g tendrá un cero en $\xi_p \in \mathfrak{R}$ cuando $\chi(\xi)|_{\xi_p} = -c_1/c_2$.
- 2.- Si $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, entonces g tendrá un cero en ξ_0 , toda vez que $g(\xi_0) = 0$.

En el primer caso, es posible evitar la divergencia en (1.4). Sólo es necesario escoger apropiadamente las constantes c_1 y c_2 , tal que su cociente negativo no pertenezca a la imagen de $\chi(\xi)$, esto es $-c_1/c_2 \notin \text{Imagen}\{\chi(\xi)\} \forall \xi$.

En el segundo caso, la singularidad es inevitable. Sin embargo en el capítulo siguiente se desarrolla este tipo de soluciones para dos casos particulares y se discute su importancia.

Capítulo 4

Generando Nuevas Soluciones

Las soluciones presentadas hasta ahora (2.1) y (2.6), tienen como característica común que el factor métrico es una función regular con simetría de reflexión. En este capítulo se mostrará que aplicando el método expuesto previamente, es posible encontrar familias de soluciones con características fundamentalmente diferentes.

4.1. Nuevas soluciones dinámicas con expansión dS

Cuando se aplica el mecanismo (3.4) y (3.5) a la solución dinámica con expansión dS (2.1) reportada en [6], se obtienen dos soluciones nuevas: una irregular con simetría de reflexión y la solución general embebida en un espaciotiempo asimétrico. Ambas soluciones se presentan a continuación.

4.1.1. Solución irregular

El inverso del factor métrico de (2.1) viene dado por

$$g_1(\xi) = \cosh^\delta(\beta\xi/\delta), \quad (4.1)$$

el cual es una solución particular a (3.1). Ahora es posible hallar una nueva solución, g_2 , aplicando el mecanismo presentado en el capítulo anterior, obteniéndose

$$g_2(\xi) = \frac{i\delta}{\beta - 2\beta\delta} \frac{|\sinh(\beta\xi/\delta)|}{\sinh(\beta\xi/\delta)} \cosh^{1-\delta}(\beta\xi/\delta) {}_2F_1 [l, k, n, \cosh^2(\beta\xi/\delta)] , \quad (4.2)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica con $l = 1/2 - \delta$, $k = l + \delta$ y $n = l + 1$. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se considera el caso $\delta = 1/4$, y la expresión se reduce a

$$g_2(\xi) = \frac{-i}{2\beta} \cosh^{1/4}(4\beta\xi) F[2i\beta\xi, 2] , \quad (4.3)$$

donde $F[2i\beta\xi, 2]$ es la función elíptica incompleta de primer orden, la cual es completamente imaginaria para el argumento $2i\beta\xi$ y módulo 2. En consecuencia, g_2 es una función real.

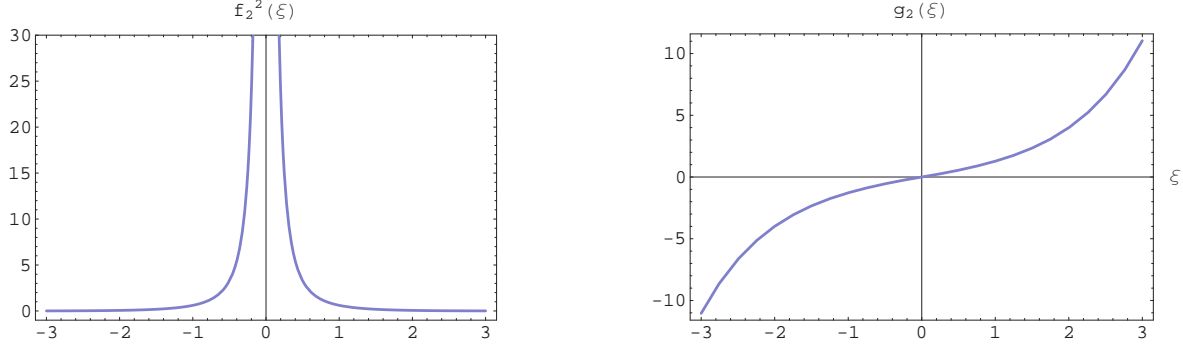


Figura 4.1: Factor métrico , $f_2^2(\xi)$, (izquierda) y su inverso $g_2(\xi)$, (derecha), de la nueva solución para $\delta = 1/4$ y $\beta = 1$.

La Figura 4.1 presenta las gráficas del factor métrico y su recíproco, donde se evidencia una singularidad en f_2 . Por tal razón se ha denominado esta solución *irregular*.

Para calcular el potencial, se sustituye g_2 en (3.5) y se tiene

$$V_2(\xi) = -6 [\cosh 4\beta\xi]^{-1/2} - \frac{21}{8} [\cosh 4\beta\xi]^{-3/2} F[2i\beta\xi, 2]^2 + 6i \tanh(4\beta\xi) F[2i\beta\xi, 2]. \quad (4.4)$$

Ahora bien, se desea expresar este potencial en función del campo escalar ϕ . Para ello, de (2.2), se despeja ξ para $\delta = 1/4$,

$$\xi = \frac{1}{4\beta} \arg \sinh[\tan(\phi/\phi_0)], \quad \phi_0 = 3/4 \quad (4.5)$$

y se sustituye en (4.4) dando lugar a

$$V_2(\phi) = -6 |\cos 4\phi/3|^{1/2} - \frac{21}{8} |\cos 4\phi/3|^{3/2} F[i/2 \arg \sinh \tan 4\phi/3, 2]^2 + 6i |\cos 4\phi/3| \tan(4\phi/3) F[i/2 \arg \sinh \tan 4\phi/3, 2], \quad (4.6)$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 4.2. De igual forma, se presentan la densidad de energía y la densidad de presión.

$$\rho_2(\xi) = -\frac{3}{4} \cosh(4\beta\xi)^{-3/2} (8 \cosh(4\beta\xi) + 5 F[2i\beta\xi, 2]^2) + 6i \tanh(4\beta\xi) F[2i\beta\xi, 2], \quad (4.7)$$

$$P_2(\xi) = -\frac{3}{2} \cosh(4\beta\xi)^{-3/2} (4 \cosh(4\beta\xi) + F[2i\beta\xi, 2]^2) + 6i \tanh(4\beta\xi) F[2i\beta\xi, 2]. \quad (4.8)$$

Esta solución representa efectivamente una nueva pared de dominio, pues el campo escalar interpola entre los vacíos del potencial. Nótese que, a pesar de la singularidad en

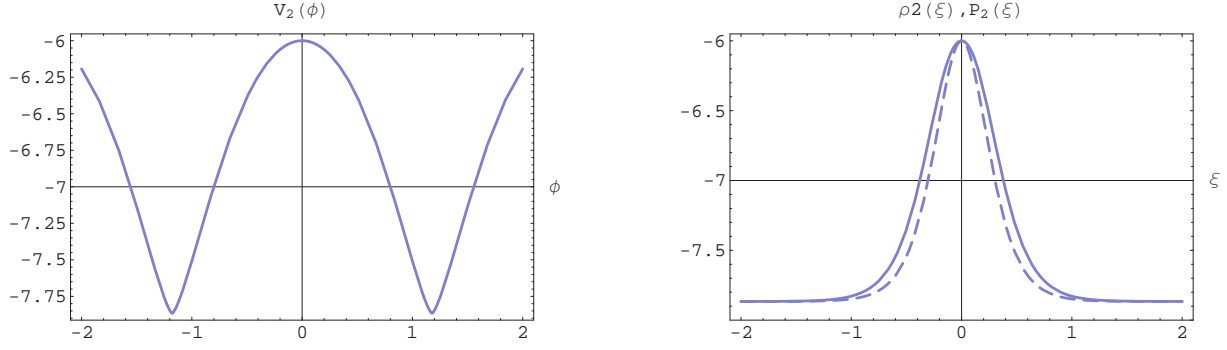


Figura 4.2: Izquierda: Potencial de autointeracción, $V_2(\phi)$. Derecha: Densidad de energía, $\rho_2(\xi)$, (línea continua) y densidad de presión, $P_2(\xi)$, (línea punteada) de la nueva solución para $\delta = 1/4$ y $\beta = 1$.

el factor métrico, la densidad de energía es suave para todo el dominio de la función. Esto sugiere que (4.3) representa una región del espaciotiempo bien comportada y que la singularidad puede ser removida con una adecuada transformación de coordenadas; aunque esto está fuera del alcance del presente trabajo.

Adicionalmente, la nueva pared está inmersa en un espaciotiempo *AdS* con constante cosmológica $\Lambda = -6\epsilon$ donde $\epsilon \approx 1,3$.¹ como se aprecia en la Figura 4.2, mientras que la solución original (2.1) tiene constante cosmológica nula.

En la siguiente sección se muestra que la superposición lineal de g_1 y g_2 dadas por (4.1) y (4.2), respectivamente, define otra pared de dominio con interesantes propiedades.

4.1.2. Solución general

Para completar la integración de (3.3), se presenta su solución general

$$g(\xi) = c_1 \cosh^\delta(\beta\xi/\delta) + c_2 \frac{i\delta}{\beta - 2\beta\delta} \frac{|\sinh(\beta\xi/\delta)|}{\sinh(\beta\xi/\delta)} \cosh^{1-\delta}(\beta\xi/\delta) {}_2F_1[l, k, n, \cosh^2(\beta\xi/\delta)] . \quad (4.9)$$

Para el caso particular $\delta = 1/4$,

$$g(\xi) = \cosh^{1/4}(4\beta\xi) \left[c_1 - c_2 \frac{i}{2\beta} F[2i\beta\xi, 2] \right] , \quad (4.10)$$

donde $F[2\beta\xi, 2]$ es la función elíptica incompleta de primer orden y se escoge $-c_1/c_2 \neq \text{Imagen}\{\chi(\xi)\} = \{-\epsilon/2\beta, +\epsilon/2\beta\}$, con $\epsilon \approx 1,3$. La Figura 4.3 muestra el factor métrico $f = 1/g$.

Para obtener el potencial de autointeracción, la densidad de energía, y la densidad de presión, se sigue una metodología análoga a la presentada en las secciones anteriores y su comportamiento se muestra en las Figuras 4.3 y 4.4 para diferentes valores de c_2 .

$$V(\phi) = \frac{21}{8} |\cos 4\phi/3|^{3/2} \mathcal{H}(\phi)^2 - 6c_2 |\cos 4\phi/3|^2 \mathcal{H}(\phi) \sinh(4\phi/3) - 6c_2^2 |\cos 4\phi/3|^{1/2} , \quad (4.11)$$

¹ Para determinar la constante cosmológica de esta solución se tomó $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rho_2(\xi)$. Para ello se utilizó que $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} iF[2i\beta\xi, 2] = \pm\epsilon$ con $\epsilon \approx 1,3$ para cualquier valor de β .

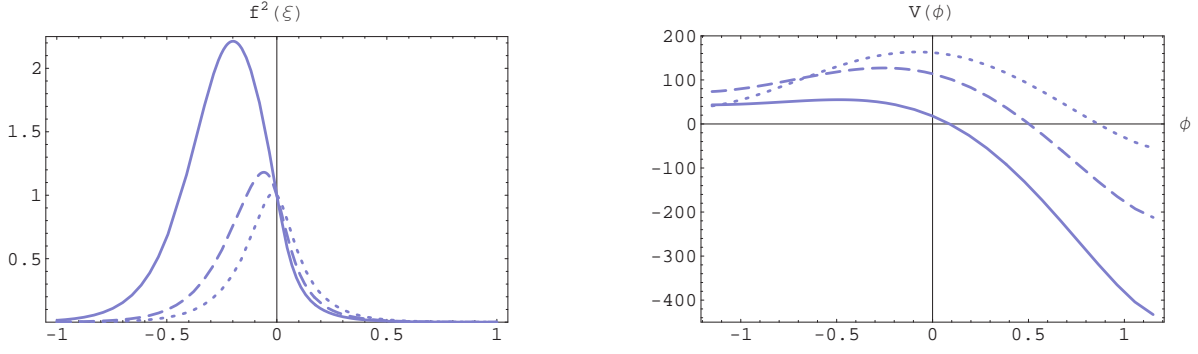


Figura 4.3: Factor métrico, $f^2(\xi)$, (izquierda); potencial de autointeracción, $V(\phi)$, (derecha), de la solución general para $\beta = 4$, $\delta = 1/4$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 1, 3, 5$. El espesor de las líneas aumenta con el incremento de c_2 .

$$\rho(\xi) = \frac{15}{4} [\cosh 4\beta\xi]^{-3/2} \mathcal{H}(\xi)^2 - 6 c_2 \mathcal{H}(\xi) \tanh(4\beta\xi) - 6 c_2^2 [\cosh 4\beta\xi]^{-1/2}, \quad (4.12)$$

$$P(\xi) = \frac{3}{2} [\cosh 4\beta\xi]^{-3/2} \mathcal{H}(\xi)^2 - 6 c_2 \mathcal{H}(\xi) \tanh(4\beta\xi) - 6 c_2^2 [\cosh 4\beta\xi]^{-1/2}. \quad (4.13)$$

donde $\mathcal{H}(\xi) \equiv 2c_1\beta - c_2 i F[2i\beta\xi, 2]$.

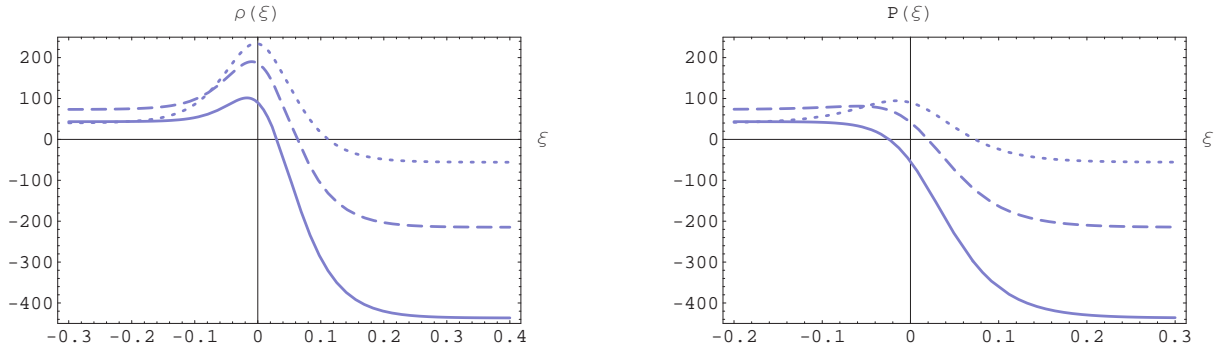


Figura 4.4: Densidad de energía, $\rho(\xi)$, (izquierda); densidad de presión, $P(\xi)$, (derecha), de la solución general para $\beta = 4$, $\delta = 1/4$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 1, 3, 5$. El espesor de las líneas aumenta con el incremento de c_2 .

El mecanismo utilizado ha permitido obtener una nueva pared de dominio, cuya característica más significativa es la asimetría tanto en el factor métrico como en el potencial de autointeracción y el Tensor Energía-Impulso. Efectivamente, cuando $\xi \rightarrow +\infty$, el espaciotiempo es asintóticamente AdS con constante cosmológica $-12c_2\beta(1 + c_2\epsilon/2\beta)$, y cuando $\xi \rightarrow -\infty$, el espaciotiempo es asintóticamente dS con constante cosmológica $+12c_2\beta(1 - c_2\epsilon/2\beta)$. La asimetría de esta solución depende del parámetro c_2 , tal que cuando $c_2 = 0$, se recupera la solución simétrica reportada en [6], con g_1 dada por (4.1).

Notablemente, a pesar de que la expresión de g_2 (4.2) alberga una singularidad en $\xi = 0$, la solución general, realizada como la suma de g_1 y g_2 , es una función suave y bien comportada. Adicionalmente, el potencial escalar es diferente en los casos irregular y general. De tal manera que se han encontrado dos nuevos espaciotiempos pared de dominio con expansión dS compatibles con el mismo campo escalar, pero con características fundamentalmente diferentes. Este análisis también es válido para las soluciones estáticas que se generan en la próxima sección.

4.2. Nuevas soluciones estáticas

De manera análoga, aplicando el mecanismo (3.4) y (3.5) a la solución particular estática reportada en [8, 12], se obtienen dos soluciones nuevas: una estática irregular con simetría Z_2 y la solución general embebida en un espaciotiempo asimétrico. Ambas se presentan a continuación.

4.2.1. Solución irregular

En la solución estática reportada en [8, 12], el inverso del factor métrico viene dado por

$$g_1 = [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{1/2s}, \quad (4.14)$$

el cual es solución a (3.1). Se halla otra solución, g_2 , aplicando el mecanismo presentado en el capítulo anterior y se tiene

$$g_2 = \alpha\xi [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{1/2s} {}_2F_1[l, k, n, -(\alpha\xi)^{2s}] \quad (4.15)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica con $l = 1/2s$, $k = 2l$, $n = 1 + l$.

La Figura 4.5 presenta las gráficas del factor métrico y su recíproco, donde se evidencia la singularidad de f_2 . Siguiendo la metodología usual, se halla el potencial escalar, la

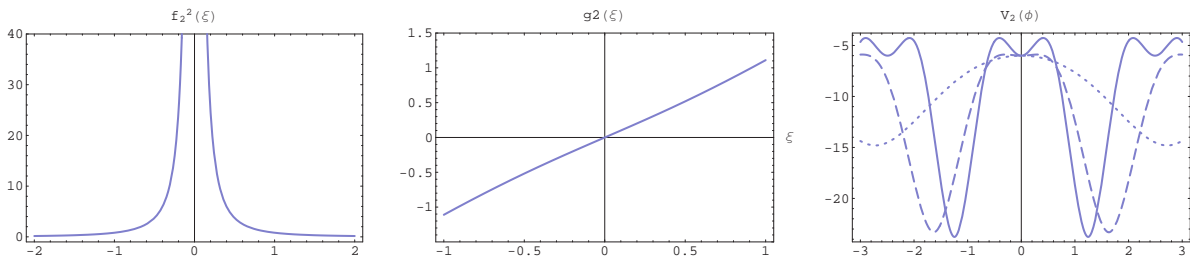


Figura 4.5: Izquierda: Factor Métrico, $f_2^2(\xi)$. Centro: Recíproco del factor métrico, $g_2(\xi)$, para $\alpha = 1$ y $s = 1$. Derecha: Potencial de autointeracción $V_2(\phi)$ para $\alpha = 1$ y $s = 1, 5, 9$. En esta gráfica y en las sucesivas el espesor de las líneas aumenta con el incremento de s .

densidad de energía y la densidad de presión, cuyas gráficas se muestran en las Figuras

4.5 y 4.6.

$$V_2(\phi) = -12\alpha^2 \sin^2(\phi/\phi_0) {}_2F_1[l, k, n; -\tan^2(\phi/\phi_0)] - 6\alpha^2 \cos^{2/s}(\phi/\phi_0) - \frac{3}{8}\alpha^2 \sin^2(2\phi/\phi_0) \cos^{-2/s}(\phi/\phi_0) {}_2F_1[l, k, n; -\tan^2(\phi/\phi_0)]^2 [1 - 2s + 4 \tan^2(\phi/\phi_0)], \quad (4.16)$$

$$\rho_2(\xi) = -6\alpha^2 [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-1/s} + 12\alpha^2 (\alpha\xi)^{2s} [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-1} {}_2F_1[l, k, n, -(\alpha\xi)^{2s}] - 3\alpha^2 (\alpha\xi)^{2s} [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-2+1/s} (-1 + 2s - 2(\alpha\xi)^{2s}) {}_2F_1[l, k, n, -(\alpha\xi)^{2s}]^2 \quad (4.17)$$

$$P_2(\xi) = -6\alpha^2 (1 + (\alpha\xi)^{2s})^{-2-1/s} \left[1 + (\alpha\xi)^{2s} \left[1 + (1 + (\alpha\xi)^{2s})^{1/s} {}_2F_1[l, k, n, -(\alpha\xi)^{2s}] \right] \right]^2. \quad (4.18)$$

Se ha hallado una nueva solución tipo pared de dominio, donde $\phi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \phi_0$ cuando $\xi \rightarrow \pm \infty$ correspondientes a los vacíos del potencial. Las características de esta familia de soluciones son similares a las presentadas en la Sección 2.2. Para $s = 1$, en la Figura 4.6, se tiene una pared simple con la concentración de energía usual alrededor del origen [8]. Para $s \neq 1$, se tienen paredes dobles con dos interfases para las cuales existe una fuerte concentración de energía, las cuales se agudizan a medida que incrementa s [12].

No obstante, a diferencia de la solución original, el tensor métrico de la nueva solución es discontinuo sobre la hipersuperficie en $\xi = 0$. Sin embargo, la densidad de energía no presenta singularidades, lo cual sugiere que se tiene una singularidad de coordenadas no física [15]. Adicionalmente, los vacíos de esta solución son *AdS* con constante cosmológica $\Lambda = -6\alpha^2 [\Gamma(l)\Gamma(n)/\Gamma(k)]^2$, mientras que la solución original tiene $\Lambda = -6\alpha^2$.

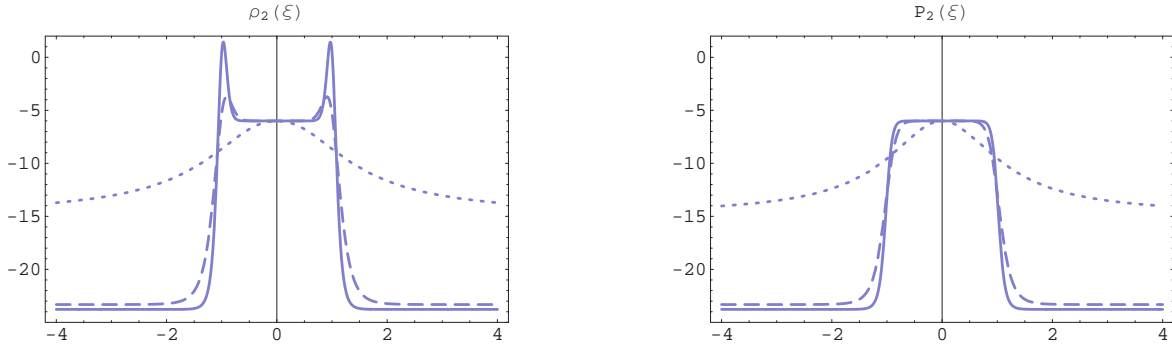


Figura 4.6: Izquierda: Densidad de energía, $\rho_2(\xi)$, para $\alpha = 1$ y $s = 1, 5, 9$. Derecha: Densidad de Presión, $P_2(\xi)$ de la nueva solución para $\alpha = 1$ y $s = 1, 5, 9$.

4.2.2. Solución general

Para el campo escalar (2.7), la solución general de (3.3) está compuesta por la superposición lineal de g_1 y g_2 , dadas por (4.14) y (4.15), respectivamente,

$$g(\xi) = [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{1/2s} [c_1 + c_2 \cdot {}_2F_1[l, k, n, -(\alpha\xi)^{2s}] \xi], \quad (4.19)$$

donde c_2 tiene unidades de inverso de longitud. En este caso es posible evitar las singularidades en el factor métrico $f = 1/g$, escogiendo $-c_1/c_2 \neq \text{Imagen}\{\chi(\xi)\}$,

$$\text{Imagen}\{\chi(\xi)\} = \left[-\frac{\Gamma(l) \Gamma(n)}{\alpha\Gamma(k)}, +\frac{\Gamma(l) \Gamma(n)}{\alpha\Gamma(k)} \right], \quad (4.20)$$

donde $l = 1/2s$, $k = 2l$, $n = 1 + l$. Sustituyendo (4.19) en (3.5) se halla el potencial de autointeracción,

$$V(\phi) = -6c_2^2 \cos^{2/s}(\phi/\phi_0) - \frac{3}{4} \sin^2(\phi/\phi_0) \tan^{-2/s}(\phi/\phi_0) \mathcal{K}(\phi) \quad (4.21)$$

$$\{16c_2 \tan^{1/s}(\phi/\phi_0) + \cos^{-2/s}(\phi/\phi_0) [5 - 2s - (3 + 2s) \cos(2\phi/\phi_0)] \mathcal{K}(\phi)\}$$

donde $\mathcal{K}(\phi) \equiv \alpha + c_2 \tan^{1/s}(\phi/\phi_0) {}_2F_1[l, k, n, -\tan^2(\phi/\phi_0)]$.

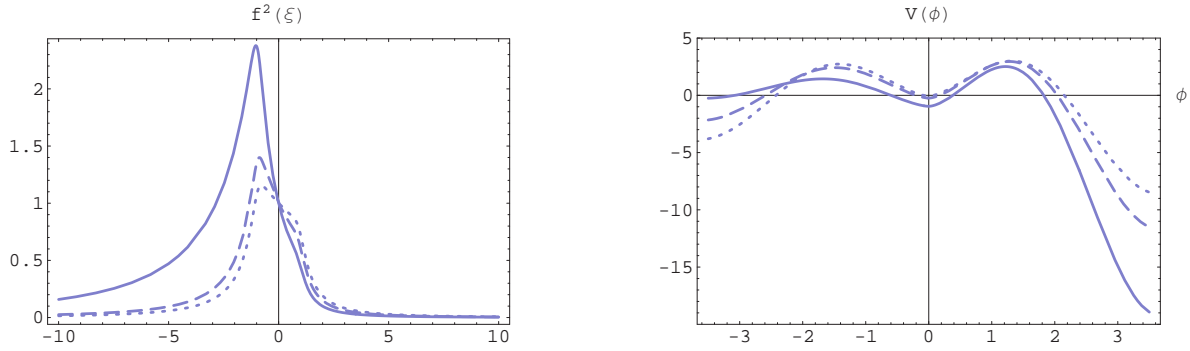


Figura 4.7: Izquierda: factor métrico $f(\xi)$. Derecha: Potencial de autointeracción $V(\phi)$, ambas para $\alpha = 1$, $s = 5$ y $c_2 = 1/10, 1/5, 2/5$. En esta figura y en las sucesivas el espesor de las líneas aumenta con el incremento de c_2 .

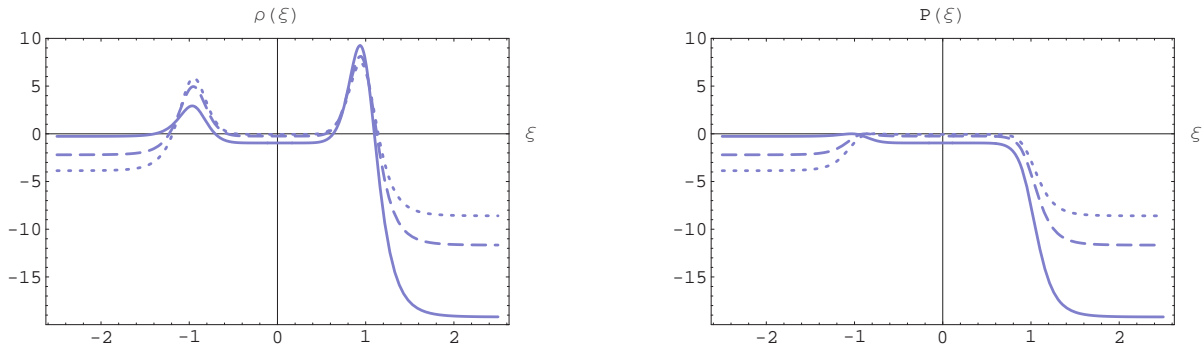


Figura 4.8: Izquierda: Densidad de energía $\rho(\xi)$. Derecha: Densidad de Presión $P(\xi)$, ambas para $\alpha = 1$, $s = 5$ y $c_2 = 1/10, 1/5, 2/5$.

A diferencia de la solución original y la irregular, tanto el factor métrico como el potencial de autointeracción $V(\phi)$ no poseen simetría de reflexión en la dirección perpendicular a la pared, como se muestra en la Figura 4.7. En efecto, esta solución interpola asintóticamente entre vacíos AdS diferentes, con constantes cosmológicas Λ_{\pm} cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, tal que

$$\Lambda_+ = -6 \left[\frac{c_1 \alpha \Gamma(k) + c_2 \Gamma(l) \Gamma(n)}{\Gamma(k)} \right]^2, \quad \Lambda_- = -6 \left[\frac{c_1 \alpha \Gamma(k) - c_2 \Gamma(l) \Gamma(n)}{\Gamma(k)} \right]^2. \quad (4.22)$$

En la Figura 4.8, se presentan la densidad de energía y la densidad de presión. Se tiene ahora una configuración compuesta por dos subparedes, donde existe una notable diferencia entre la magnitud de la densidad de energía de ambas, como consecuencia de la asimetría del sistema.

Capítulo 5

Espectro de Fluctuaciones Gravitacionales

Como ya se ha mencionado, las paredes de dominio son soluciones al acoplamiento Einstein-Campo Escalar que representan posibles modelos del universo. Para que estos modelos sean atractivos desde el punto de vista de la cosmología estándar, es esencial reproducir en ellos el potencial gravitacional Newtoniano. En el caso de las paredes estáticas, el potencial se calcula mediante la expresión (1), y para las dinámicas con expansión dS [3], mediante

$$V(r) = (G_5 |\psi_0(0)|^2) \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{|\psi_0(0)|^2} \int_0^{+\infty} dm |\psi_m(0)|^2 m e^{-mr} \right). \quad (5.1)$$

En estas expresiones, se advierte que el potencial se puede determinar siempre que se conozca el modo cero ψ_0 y los modos masivos ψ_m del espectro de fluctuaciones gravitacionales.

En la primera sección de este capítulo, se realizan perturbaciones al espaciotiempo, con el fin de conocer la dinámica que rige el espectro de fluctuaciones. En la segunda sección, se estudia la localización del modo cero sobre las soluciones asimétricas (4.10) y (4.19). Finalmente, en la tercera, se analiza el espectro gravitacional completo en el límite de pared delgada de las soluciones dinámicas (2.1) y (4.10).

5.1. Perturbaciones Gravitacionales

En [13] se propone una generalización del procedimiento para obtener las ecuaciones que describen las perturbaciones del espaciotiempo en el vacío presentado en la bibliografía [14]. Este procedimiento se resume a continuación.

Sea g_{ab} y ϕ las soluciones exactas al sistema Einstein-Campo Escalar formado por (1.1), (1.2) y (1.3). Ahora suponga que existe una familia uniparamétrica de tensores métricos $\tilde{g}_{ab}(\lambda)$ y una familia uniparamétrica de campos escalares $\tilde{\phi}(\lambda)$ tal que también

sean solución del sistema Einstein-Campo Escalar dados por ¹

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \lambda h_{ab} , \quad \tilde{\phi} = \phi + \lambda \varphi , \quad (5.2)$$

donde h_{ab} y φ representan la perturbación de la métrica y el campo escalar, respectivamente. De tal manera que a primer orden se tiene

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \right|_{\lambda=0} = h_{ab}, \quad \left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{\phi} \right|_{\lambda=0} = \varphi . \quad (5.3)$$

Las ecuaciones de Einstein-Campo Escalar, escritas en la forma de Ricci, para \tilde{g}_{ab} están dadas por²

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ab} \tilde{T} ; \quad \tilde{T}_{ac} = \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ac} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_d \tilde{\phi} + V(\tilde{\phi}) \right] \quad (5.4)$$

donde $\tilde{T} = \tilde{g}^{ab} \tilde{T}_{ab}$. Mientras que para el campo escalar perturbado $\tilde{\phi}$, se tiene

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \frac{d\tilde{V}(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}} = 0 . \quad (5.5)$$

Para hallar las ecuaciones que describen la dinámica de la perturbación h_{ab} a primer orden, se diferencia (5.4) con respecto a λ y se hace $\lambda = 0$ ³,

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ab} \right|_{\lambda=0} - \frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ab} \tilde{T} \right]_{\lambda=0} . \quad (5.6)$$

Se desarrolla cada uno de estos términos, obteniéndose ⁴

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \square h_{ac} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_c (g^{bd} h_{bd}) + \nabla_{(a} \nabla^b h_{c)b} + R_{(ac)}^{bd} h_{bd} + R_{(ad)}^{bd} h_{c)b} = \\ & + 2 \nabla_{(a} \varphi \nabla_{c)} \varphi + \frac{D-5}{6} h_{ac} g^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi - \frac{D-5}{6} g_{ac} h^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi \\ & + \frac{D-5}{3} g_{ac} g^{bd} \nabla_b \varphi \nabla_d \phi + \frac{D-3}{3} h_{ac} V(\phi) + \frac{D-3}{3} g_{ac} \frac{dV}{d\phi} \varphi , \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde \square es el D'Alambertiano 5-dimensional definido por $\square \equiv g^{ab} \nabla_a \nabla_b$. Mientras que la ecuación de la dinámica del campo viene dada por

$$-h^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g^{ab} g^{cd} (\nabla_a h_{bd} + \nabla_b h_{ad} - \nabla_d h_{ab}) \nabla_c \phi + g^{ab} \nabla_a \nabla_b \varphi - \frac{d^2 V}{d\phi^2} \varphi = 0 . \quad (5.8)$$

Ahora bien, imponiendo las condiciones de traza, sector transverso, y calibre axial nulo; respectivamente,

$$g^{ab} h_{ab} = 0 ; \quad \nabla_a h_b^a = 0 ; \quad h_{a4} = 0, \quad (5.9)$$

¹ El tensor métrico con índices superiores está dado por $\tilde{g}^{ab} = g^{ab} - \lambda h^{ab}$, satisfaciendo $\tilde{g}_{da} \tilde{g}^{ae} = \delta_d^e$ para perturbaciones a primer orden.

² Ver demostración en Apéndice C.1

³ El tensor de Ricci perturbado \tilde{R}_{ab} se escribe en función del tensor de Ricci sin perturbar R_{ab} . Ver demostración en el Apéndice C.2

⁴ Ver demostración en Apéndice C.3

y haciendo $\varphi = 0$, $\phi = \phi(\xi)$ y $\mathcal{D} = 5$, se tiene

$$-\frac{1}{2}\square h_{ac} + R_{(ac)}^{bd}h_{bd} + R_{(ad)}^{bd}h_{cb} = \frac{2}{3}h_{ac}V(\phi) . \quad (5.10)$$

La expresión (5.10) representa las ecuaciones de Einstein-Campo Escalar para la perturbación gravitacional, y en particular para la métrica dada por (1.4), se reduce a

$$\frac{1}{f^2} \left[\square_{(4)} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{f'}{f} \frac{\partial}{\partial \xi} - 2\frac{f''}{f} - 2\beta^2 \right] h_{ab} = 0 , \quad (5.11)$$

donde $\square_{(4)}$ es el D'Alambertiano 4-dimensional definido por $\square_{(4)} \equiv g^{mn}\nabla_m\nabla_n$.

Para resolver (5.11) analíticamente, se propone la separación de variables $h_{ab} = \chi(t, x, y, z)\Psi_{ab}(\xi)$ donde $\chi(t, x, y, z)$ representa una onda plana libre responsable de la gravitación sobre la hipersuperficie 4-dimensional de la pared de dominio y cumple con

$$\square_{(4)}\chi(t, x, y, z) = m^2\chi(t, x, y, z) , \quad (5.12)$$

donde m es una constante. Al sustituir en (5.11) se tiene

$$m^2\Psi_{ab}(\xi) + \left[\partial_\xi^2 - \frac{f'}{f}\partial_\xi - 2\frac{f''}{f} - 2\beta^2 \right] \Psi_{ab}(\xi) = 0 \quad (5.13)$$

Adicionalmente se propone que $\Psi_{ab}(\xi) = f^{1/2}\psi_{ab}(\xi)$, donde f es el factor métrico y sustituyendo en (5.13),

$$\partial_\xi^2\psi_{ab} = \left[\frac{3}{4}\frac{f'^2}{f^2} + \frac{3}{2}\frac{f''}{f} + 2\beta^2 - m^2 \right] \psi_{ab}(\xi) . \quad (5.14)$$

La ecuación (5.14) es una ecuación de Schrödinger y se puede escribir

$$[-\partial_\xi^2 + V_{QM}] \psi_{ab} = \tilde{m}^2\psi_{ab}(\xi) , \quad V_{QM} = \frac{3}{4}\frac{f'^2}{f^2} + \frac{3}{2}\frac{f''}{f} , \quad (5.15)$$

donde V_{QM} es el potencial mecánico cuántico y se define la masa *de Sitter* como $\tilde{m}^2 \equiv m^2 - 2\beta^2$.

La solución de (5.15) está compuesta por un espectro de soluciones ψ_{ab} , el cual representa las fluctuaciones (u ondas) gravitacionales responsables de la propagación de la fuerza de gravedad y está compuesto por el modo no masivo para $\tilde{m}^2 = 0$ y los modos masivos para $\tilde{m}^2 \neq 0$, siendo \tilde{m}^2 la masa asociada a la onda gravitacional.

Es importante mencionar que el operador $[-\partial_\xi^2 + V_{QM}]$ puede ser factorizado como el producto de un operador Q y su conjugado Q^\dagger ,

$$Q^\dagger Q \psi_{ab} = \tilde{m}^2 \psi_{ab}(\xi) , \quad (5.16)$$

donde

$$Q^\dagger = \left[\partial_\xi + \frac{3}{2}\frac{f'}{f} \right] , \quad Q = \left[-\partial_\xi + \frac{3}{2}\frac{f'}{f} \right] . \quad (5.17)$$

En consecuencia los autovalores asociados a (5.15) no pueden ser negativos⁵, $\tilde{m}^2 \geq 0$. Esto es consistente con la teoría de la relatividad, donde las partículas no pueden viajar a velocidades mayores que la luz y no se tienen masas imaginarias.

⁵Ver demostración en Apéndice D

5.2. Modo cero del espectro gravitacional

Se puede probar que $\psi \sim f^{3/2}$ (subíndices ab omitidos) es solución a (5.15) cuando $\tilde{m}^2 = 0$. A esta solución se le denomina Modo Cero o Modo No Masivo del espectro de fluctuaciones gravitacionales y se denota por ψ_0 .

La importancia de su estudio radica en que, si se logra localizar el modo cero sobre la pared de dominio, entonces existe la posibilidad de encontrar un potencial gravitacional Newtoniano asociado al modelo, toda vez que las correcciones al potencial no sean significativas [1]. Si por el contrario, no se logra confinar la gravedad sobre la pared, entonces se sabe de antemano que no es posible reproducir el potencial de Newton conocido y obtener un modelo adecuado de nuestro universo.

En esta sección se presenta el modo cero y su localización para las soluciones asimétricas (4.10) y (4.19) presentadas en la Sección 4.1.2 y la Sección 4.2.2, respectivamente. El modo no masivo asociado a las paredes regulares simétricas mostradas en el Capítulo 2 ya ha sido analizado ampliamente [7, 8, 12] y no serán objeto de estudio en este trabajo.

5.2.1. Localización del modo cero sobre pared dinámica con expansión dS asimétrica

El modo cero de la solución dinámica con expansión dS asimétrica presentada en la Sección 4.1.2, para $\delta = 1/4$, está dado por

$$\psi_0(\xi) = \left[\cosh^{1/4}(4\beta\xi) \left(c_1 - c_2 \frac{i}{2\beta} F[2i\beta\xi, 2] \right) \right]^{-3/2} \quad (5.18)$$

siendo el potencial mecánico cuántico asociado,

$$\begin{aligned} V_{QM}(\xi) = & \frac{15\beta^2}{\cosh^2(4\beta\xi) \mathcal{H}(\xi)^2} [c_2^2 \cosh(4\beta\xi) \\ & + \frac{c_2}{2} \cosh^{-1/2}(4\beta\xi) \sinh(8\beta\xi) \mathcal{H}(\xi) - \frac{1}{40} (19 - 3 \cosh 8\beta\xi) \mathcal{H}(\xi)^2]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

La Figura 5.1 muestra que el modo cero $\psi_0(\xi)$ está fuertemente localizado sobre el pozo de potencial de la pared de dominio. Esto es atractivo fenomenológicamente pues, sobre este modelo, existe la posibilidad de obtener un potencial gravitacional Newtoniano, siempre que las correcciones al potencial no sean significativas. Obsérvese además que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} V_{QM} = \frac{9}{4} \beta^2. \quad (5.20)$$

Esto indica que existe una brecha de $\frac{9}{4}\beta^2$ entre los modos masivos continuos, $\tilde{m}^2 > \frac{9}{4}\beta^2$, y el modo cero confinado al pozo de potencial mecánico cuántico.

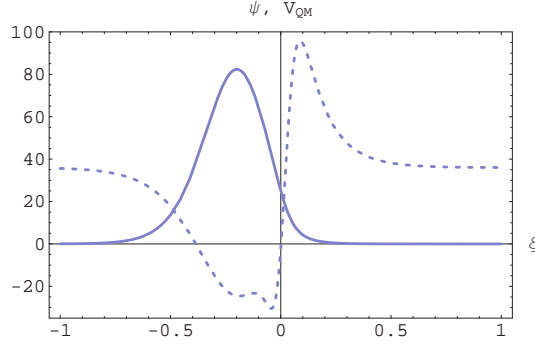


Figura 5.1: Modo cero gravitacional $\psi_0(\xi) \sim f^{3/2}$ (línea continua) y Potencial mecánico cuántico $V_{QM}(\xi)$ (línea discontinua), para $\delta = 1/4$, $\beta = 4$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 5$.

5.2.2. Localización del modo cero sobre pared estática asimétrica

El modo cero de la solución estática asimétrica presentada en la Sección 4.2.2 está dado por

$$\psi_0(\xi) = [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-3/4s} [c_1 + c_2 {}_2F_1[l, k, n, -(\alpha\xi)^{2s}] \xi]^{-3/2}, \quad (5.21)$$

siendo el potencial mecánico cuántico asociado,

$$\begin{aligned} V_{QM}(\xi) = & \frac{3\alpha [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-\frac{s+1}{s}}}{4\xi^2 \mathcal{K}(\xi)^2} \left\{ 5\alpha (c_2\xi)^2 [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{\frac{s-1}{s}} \right. \\ & + (\alpha\xi)^{2s} \left[10c_2\alpha\xi + \alpha [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-\frac{s-1}{s}} [2 - 4s + 5(\alpha\xi)^{2s}] \right] + c_2\xi (\alpha\xi)^{2s} \\ & \left. [\alpha + \mathcal{K}(\xi)] {}_2F_1[l, k, n, -(\alpha\xi)^{2s}] \left[10c_2\alpha\xi + [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-\frac{s-1}{s}} [2 - 4s + 5(\alpha\xi)^{2s}] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

En la Figura 5.2 se muestra una gráfica del potencial mecánico cuántico V_{QM} y el modo cero de esta familia de soluciones para $s = 1$ y $s \neq 1$. En el primer caso, se tiene una pared simple donde el modo cero está localizado; y en el segunda caso, se tiene una pared doble, donde existe una mayor probabilidad de hallar el modo cero sobre la pared ubicada cerca al espaciotiempo con menor curvatura asintótica. De hecho, se observa que la supresión de la función de onda del estado base es menos intensa sobre esta región del espacio que sobre la región con mayor curvatura asintótica. Nótese además que en ambos casos, el potencial V_{QM} no separa el espectro de modos masivos continuos del modo cero confinado.

5.3. Espectro gravitacional de soluciones dinámicas en el límite de pared delgada

En capítulos anteriores, ya se ha discutido la relevancia de las paredes dinámicas. Éstas corresponden a universos en expansión con métricas del tipo Friedman-Robertson-Walker. Específicamente, en esta sección, se desea estudiar el espectro completo de las soluciones

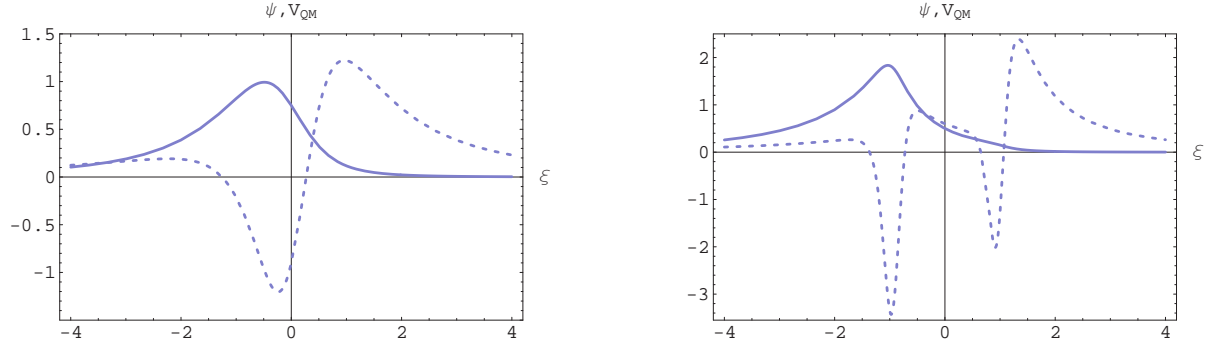


Figura 5.2: Modo cero gravitacional $\psi_0(\xi) \sim f^{3/2}$ (línea continua) y Potencial mecánico cuántico $V_{QM}(\phi)$ (línea discontinua). A la izquierda para $s = 1$, $\alpha = 1$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 2/5$ y a la derecha para $s = 5$, $\alpha = 1$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 2/5$.

dinámicas con expansión dS (2.1) y (4.10) en el límite de pared delgada, dado que no se tiene ninguna evidencia de dimensiones adicionales.

5.3.1. Solución particular dinámica con expansión dS

En la Sección 2.1 se presentó la solución con expansión dS cuyo factor warp viene dado por

$$f(\xi) = \cosh^{-\delta}(\beta\xi/\delta) \quad (5.23)$$

donde δ se interpreta como el ancho de la pared. Se desea ahora determinar su límite de pared delgada [8], esto es cuando $\delta \rightarrow 0$,⁶

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\xi) = e^{-\beta|\xi|}, \quad (5.24)$$

y se calcula el potencial mecánico cuántico, sustituyendo (5.24) y sus respectivas derivadas en la expresión de V_{QM} (5.15), obteniéndose⁷

$$V_{QM} = \frac{9}{4}\beta^2 - 3\beta\delta(\xi), \quad (5.25)$$

donde $\delta(\xi)$ es la delta de Dirac.

Esta expresión representa un potencial tipo pozo infinito y, bajo esta configuración, se puede probar que existe un único estado confinado, mientras que los demás estados están libres [17]. El único estado confinado corresponde al modo cero del espectro gravitacional, $\psi_0 \sim e^{-\frac{3}{2}\beta|\xi|}$, el cual está fuertemente localizado sobre la pared de dominio. Así que en el límite de pared delgada, se puede pensar que la solución (5.24) ha heredado las propiedades de la familia de paredes gruesas original, siendo capaz de confinar la gravedad. Por otra parte, los estados libres corresponden a los modos masivos del espectro.

⁶ Ver demostración en Apéndice E.1.

⁷ Ver demostración en Apéndice F.1

Adicionalmente, nótese que se conserva una característica típica de las paredes con expansión dS [7], pues existe una brecha de $\frac{9}{4}\beta^2$ entre el modo cero y el conjunto de modos masivos, pudiéndose verificar que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{QM} = \frac{9}{4}\beta^2, \quad (5.26)$$

en consecuencia, $\tilde{m}^2 > \frac{9}{4}\beta^2$.

Habiendo presentado el modo cero y sus características, a continuación se aborda el cálculo de los modos masivos del espectro, debiéndose resolver la ecuación de Shrödinger (5.15) para $\tilde{m}^2 \neq 0$. Para ello, motivado por la discontinuidad en el potencial, se reescribe la función de onda $\psi(\xi)$ en términos de la función Heavyside $\Theta(\xi)$,

$$\psi(\xi) = \psi_>\Theta(\xi) + \psi_<\Theta(-\xi), \quad (5.27)$$

donde $\psi_>$ y $\psi_<$ son soluciones de (5.15) para $\xi > 0$ y $\xi < 0$, respectivamente; y por continuidad de la función de onda, se satisface

$$\psi_>(\xi)\Big|_{\xi=0} = \psi_<(\xi)\Big|_{\xi=0} = \psi(\xi)\Big|_{\xi=0}. \quad (5.28)$$

Sustituyendo (5.25), (5.27) con su derivada segunda ⁸ en la ecuación de Schrödinger (5.15), se tiene

$$\begin{aligned} -[\partial_\xi^2 \psi_>\Theta(\xi) + \partial_\xi^2 \psi_<\Theta(-\xi) + (\partial_\xi \psi_> - \partial_\xi \psi_<) \delta(\xi)] &= \left[\tilde{m}^2 - \frac{9}{4}\beta^2 \right] [\psi_>\Theta(\xi) + \psi_<\Theta(-\xi)] \\ &\quad - 3\beta \delta(\xi) \psi(\xi)\Big|_{\xi=0}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde se ha utilizado (5.28). Para que esta expresión sea cierta para todo ξ , todos los términos que acompañan a $\delta(\xi)$ deben ser cero. Así que

$$-\partial_\xi \psi_>(\xi)\Big|_{\xi=0} + \partial_\xi \psi_<(\xi)\Big|_{\xi=0} - 3\beta \psi(\xi)\Big|_{\xi=0} = 0 \quad (5.30)$$

Más aún, la función de onda debe tener simetría de reflexión sobre la coordenada perpendicular a la pared, entonces se cumple

$$\partial_\xi \psi_>(\xi)\Big|_{\xi=0} = -\partial_\xi \psi_<(\xi)\Big|_{\xi=0}, \quad (5.31)$$

y (5.30) se reduce a

$$2\partial_\xi \psi_>(\xi)\Big|_{\xi=0} + 3\beta \psi(\xi)\Big|_{\xi=0} = 0 \quad (5.32)$$

Por lo antes expuesto, la ecuación de Schrödinger (5.15) está dada por

$$-\partial_\xi^2 \psi_> + \frac{9}{4}\beta^2 \psi_> = \tilde{m}^2 \psi_>, \quad \forall \quad \xi > 0, \quad (5.33)$$

⁸ La primera derivada de ψ está dada por $\partial_\xi \psi = \partial_\xi \psi_>\Theta(\xi) + \partial_\xi \psi_<\Theta(-\xi) + (\psi_> - \psi_<) \delta(\xi)$.

La segunda derivada de ψ está dada por $\partial_\xi^2 \psi = \partial_\xi^2 \psi_>\Theta(\xi) + \partial_\xi^2 \psi_<\Theta(-\xi) + (\partial_\xi \psi_> - \partial_\xi \psi_<) \delta(\xi)$.

$$-\partial_\xi^2 \psi_< + \frac{9}{4}\beta^2 \psi_< = \tilde{m}^2 \psi_< , \quad \forall \quad \xi < 0 ; \quad (5.34)$$

y resolviendo, respectivamente, se tiene

$$\psi_> = A_+ \cos(k\xi) + B_+ \sin(k\xi) , \quad k^2 = \tilde{m}^2 - \frac{9}{4}\beta^2 ; \quad (5.35)$$

$$\psi_< = A_- \cos(k\xi) + B_- \sin(k\xi) , \quad (5.36)$$

donde A_\pm y B_\pm son constantes de integración y para determinarlas, se tiene

- Por continuidad de la función de onda (5.28), $A_+ = A_-$.
- Exigiendo simetría de reflexión (5.31), $B_+ = -B_-$.
- Imponiendo la condición (5.32), $A_+ = -\frac{2}{3\beta}k B_+$.

Escogiendo arbitrariamente $B_+ = 1$, las expresiones (5.35) y (5.36), se reducen a una sola expresión para todo ξ ,

$$\psi(\xi) = -\frac{2k}{3\beta} \cos(k|\xi|) + \sin(k|\xi|) . \quad (5.37)$$

Esta última expresión modela el comportamiento de los modos masivos del espectro gravitacional, los cuales oscilan libremente a lo largo de la coordenada perpendicular a la pared, como es de esperar.

5.3.2. Solución general dinámica con expansión dS

En la Sección 4.1.2 se mostró una familia de soluciones asimétrica, cuyo inverso del factor warp viene dado por

$$g(\xi) = \cosh^\delta(\beta\xi/\delta) + \alpha \frac{i\delta}{\beta - 2\beta\delta} \frac{|\sinh(\beta\xi/\delta)|}{\sinh(\beta\xi/\delta)} \cosh^{1-\delta}(\beta\xi/\delta) {}_2F_1 \left[l, k, n, \cosh^2(\beta\xi/\delta) \right] , \quad (5.38)$$

donde se ha escogido $c_1 = 1$ y $c_2 = \alpha$. Para esta familia, se desea igualmente obtener el límite de pared delgada por razones fenomenológicas. Para ello, se toma el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ ⁹, utilizando una identidad que satisface la función hipergeométrica ${}_2F_1$,

$${}_2F_1 [a, b, c, z] = (1-z)^{-a} {}_2F_1 \left[a, c-b, c, \frac{z}{z-1} \right] , \quad (5.39)$$

obteniéndose

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} g(\xi) = e^{\beta|\xi|} + \frac{\alpha}{\beta} \sinh(\beta\xi) ; \quad (5.40)$$

⁹ Ver detalles en Apéndice E.2

y el potencial mecánico cuántico asociado, está dado por ¹⁰

$$V_{QM} = \frac{15\beta^2}{4} \left[\frac{\beta e^{\beta|\xi|} (\Theta(\xi) - \Theta(-\xi)) + \alpha \cosh(\beta\xi)}{\beta e^{\beta|\xi|} + \alpha \sinh(\beta\xi)} \right]^2 - \frac{3}{2}\beta^2 - 3\beta\delta(\xi). \quad (5.41)$$

En este caso se tiene un potencial V_{QM} tipo pozo infinito asimétrico y se sabe que existe únicamente un estado ligado que corresponde al modo cero del espectro gravitacional. Nuevamente se observa que la solución es capaz de confinar la onda responsable de la gravedad, mientras que los modos masivos son estados libres. Además, existe una brecha de $\frac{9}{4}\beta^2$ entre el modo cero y el conjunto de modos masivos, ya que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{QM} = \frac{9}{4}\beta^2, \quad (5.42)$$

de tal manera $\tilde{m}^2 > \frac{9}{4}\beta^2$.

Siguiendo una metodología análoga a la sección anterior, se resuelve la ecuación de Schrödinger (5.15), reescribiendo la función de onda $\psi(\xi)$ en términos de la función Heaviside $\Theta(\xi)$, (5.27), satisfaciéndose las condiciones (5.28) y (5.30). De este modo, se tiene

$$\begin{aligned} \psi_{>}(\xi) = & A_+ [\alpha(z-1)]^a e^{-ik\xi} {}_2F_1[a, b - ik/\beta, c - ik/\beta; z] \\ & + B_+ [\alpha(z-1)]^a e^{ik\xi} {}_2F_1[a, b + ik/\beta, c + ik/\beta; z], \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \psi_{<}(\xi) = & A_- [\alpha(z-1)]^a e^{-ik\xi} {}_2F_1[a, b - ik/\beta, c - ik/\beta; z] \\ & + B_- [\alpha(z-1)]^a e^{ik\xi} {}_2F_1[a, b + ik/\beta, c + ik/\beta; z], \end{aligned} \quad (5.44)$$

donde A_{\pm} y B_{\pm} son constantes de integración y

$$a = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{5}{2}, \quad k^2 = \tilde{m}^2 - \frac{9}{4}\beta^2, \quad z = \begin{cases} \left[\frac{2\beta+\alpha}{\alpha} \right] e^{2\beta\xi} & , \quad \forall \xi > 0, \\ \left[\frac{-2\beta+\alpha}{\alpha} \right] e^{-2\beta\xi} & , \quad \forall \xi < 0. \end{cases} \quad (5.45)$$

Para determinar dos de las constantes de integración se impone la condición de continuidad (5.28) y la condición (5.30). Sin embargo, este procedimiento es matemáticamente complejo debido a la presencia de las funciones hipergeométricas. Para superar esta dificultad, se trata de hallar una aproximación válida para el problema en estudio.

En particular, obsérvese las correcciones al potencial de Newton dadas por

$$\int_{\tilde{m}_0}^{+\infty} d\tilde{m} |\psi_{\tilde{m}}(0)|^2 \tilde{m} e^{-\tilde{m}r}, \quad (5.46)$$

donde $\tilde{m}_0 = \frac{9}{4}\beta^2$. Adviértase que el factor $\tilde{m} e^{-\tilde{m}r}$ toma su valor máximo en $\tilde{m} = 1/r$ y suprime la contribución de los modos ligeros y los muy masivos, siendo significativa únicamente la contribución de los modos cercanos al valor donde ocurre el máximo. En este sentido, para tomar en cuenta la contribución de estos modos basta con expandir para valores de $\tilde{m}/\tilde{m}_0 \gg 1$. Esto es, para la notación empleada, $k \gg 1$.

¹⁰ Ver detalles en Apéndice F.2

Bajo esta perspectiva, considérese la siguiente aproximación que satisface la función hipergeométrica siempre que $\gamma \gg 1$,

$${}_2F_1[a, b - \gamma, c - \gamma; z] \approx (1 - z)^{-a} . \quad (5.47)$$

Si se identifica, $\gamma = ik/\beta$, entonces se puede hacer uso de esta aproximación en las ecuaciones (5.43) y (5.44), teniéndose

$$\psi_{>}(\xi) = A_+ i \alpha^{5/2} e^{-ik\xi} + B_+ i \alpha^{5/2} e^{ik\xi} , \quad (5.48)$$

$$\psi_{<}(\xi) = A_- \alpha^{5/2} e^{-ik\xi} + B_- \alpha^{5/2} e^{ik\xi} . \quad (5.49)$$

Las cuales se pueden expresar en términos de sencillas funciones trigonométricas

$$\psi_{>}(\xi) = (A_+ + B_+) i \alpha^{5/2} \cos(k\xi) + (A_+ - B_+) \alpha^{5/2} \sin(k\xi) , \quad (5.50)$$

$$\psi_{<}(\xi) = (A_- + B_-) \alpha^{5/2} \cos(k\xi) + (A_- - B_-) i \alpha^{5/2} \sin(k\xi) . \quad (5.51)$$

Ahora se está en posición de hallar dos de las constantes de integración, imponiendo las condiciones (5.28) y (5.30).

Las otras dos constantes se escogen arbitrariamente. En particular, se decide escogerlas de tal manera que, para estas escalas de energía, sea posible reproducir los resultados de la sección anterior con simetría de reflexión (5.37) . Esto se logra reescribiendo A_{\pm} y B_{\pm} , en función de otras dos constantes arbitrarias D_{\pm} , de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{1}{2} \alpha^{-5/2} (1 - i D_+) , & B_+ &= -\frac{1}{2} \alpha^{-5/2} (1 + i D_+) ; \\ A_- &= -\frac{1}{2} \alpha^{-5/2} (D_- + i) , & B_- &= \frac{1}{2} \alpha^{-5/2} (-D_- + i) . \end{aligned} \quad (5.52)$$

En consecuencia, la función de onda está dada por

$$\psi_{>}(\xi) = D_+ \cos(k\xi) + \sin(k\xi) , \quad \psi_{<}(\xi) = -D_- \cos(k\xi) + \sin(k\xi) , \quad (5.53)$$

donde

$$D_+ = \frac{2k^3 + 17k\beta^2}{12\beta^3 - 3k^2\beta} , \quad D_- = \frac{2k^3 + 17k\beta^2}{12\beta^3 - 3k^2\beta} . \quad (5.54)$$

Conclusiones

Luego de presentar un breve resumen acerca de las paredes de dominio y sus características fundamentales, se mostró que la dinámica de estas estructuras diferenciales es descrita por la teoría de Einstein con constante cosmológica. De esta manera, se garantiza que las configuraciones estudiadas, en el límite de pared delgada, corresponden efectivamente a posibles modelos del universo que obedecen la teoría de gravitación conocida.

Una vez logrado esto, se establecieron los escenarios sobre los cuales se analizaron los efectos gravitacionales que surgen al introducir asimetrías en el sistema. Estos escenarios asimétricos se generaron utilizando un método para hallar nuevas soluciones al acoplamiento Einstein-Campo Escalar, a partir de soluciones conocidas. Específicamente, la expresión que proporciona el campo escalar ϕ es una ecuación diferencial de segundo orden en la forma de Sturm-Liouville. En consecuencia, conociendo una solución particular, entonces es posible hallar una segunda y construir la solución general como una superposición lineal de ambas. En los casos estudiados, se encontró que la segunda solución presentaba una singularidad en el origen. Sin embargo, al construir la general, se halla una función continua y suave, cuya característica distintiva es la asimetría. En particular, se generaron dos soluciones asimétricas nuevas: una dinámica con expansión dS y otra estática.

Definidos los escenarios a estudiar, se realizaron perturbaciones al espaciotiempo con el fin de determinar las ecuaciones que rigen el espectro de fluctuaciones gravitacionales, el cual está compuesto por el modo cero (o modo no masivo) y los modos masivos. La importancia de su estudio radica en que, si se logra localizar el modo cero sobre la pared de dominio, entonces existe la posibilidad de encontrar un potencial gravitacional Newtoniano asociado al modelo, toda vez que las correcciones al potencial, dadas por los modos masivos, no sean significativas. Si por el contrario, no se logra confinar la gravedad sobre la pared, entonces se sabe de antemano que no es posible reproducir el potencial de Newton conocido y obtener un modelo adecuado de nuestro universo. Se encontró que las perturbaciones gravitacionales obedecen una ecuación diferencial de segundo orden tipo Schrödinger y es posible localizar el modo cero de las fluctuaciones gravitacionales sobre los dos escenarios asimétricos estudiados.

Finalmente, se analizó el espectro completo de fluctuaciones sobre las paredes dinámicas con expansión dS en el límite de pared delgada, dado que no se tiene ninguna evidencia de dimensiones adicionales. Se obtuvo que estas configuraciones heredan las propiedades de las paredes gruesas originales, siendo capaces de confinar el modo cero de la radiación gravitacional; mientras que los modos masivos oscilan libremente por todo el espaciotiempo 5-dimensional.

Apéndice A

La estructura más general de la Métrica

El tensor métrico (1.4) propuesto en el Capítulo 1 proviene de considerar una métrica aún más general, dada por

$$g_{ab} = f^2(\xi) \{-dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b\} + B^2(\xi, t) dx_a^i dx_b^i, \quad (\text{A.1})$$

donde $a, b = 0, \dots, 4$; x^i son las coordenadas espaciales con $i = 1, 2, 3$; y ξ es la coordenada espacial adicional.

Para este tensor métrico se construyen las componentes del tensor de Einstein ¹

$$G_t^t = \frac{3}{f^2 B} \left[-\frac{f'}{f} B' - \frac{\dot{B}^2}{B} + \frac{B'^2}{B} + B'' \right], \quad (\text{A.2})$$

$$G_1^1 = \frac{1}{f^2} \left[-2\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{B'^2}{B^2} + 2\frac{B''}{B} - \frac{f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$G_2^2 = G_3^3 = G_1^1, \quad (\text{A.4})$$

$$G_\xi^\xi = \frac{3}{f^2 B} \left[B' \frac{f'}{f} - \frac{\dot{B}^2}{B} + \frac{B'^2}{B} - \ddot{B} \right], \quad (\text{A.5})$$

$$G_t^\xi = \frac{3}{f^2 B} \left[\dot{B} \frac{f'}{f} - \dot{B}' \right]. \quad (\text{A.6})$$

Ahora bien, para satisfacer las Ecuaciones de Einstein (1.1), la componente G_t^ξ debe ser igual a cero, ya que el Tensor Energía-Impulso tiene componentes sólo en la diagonal. Cuando se impone $G_t^\xi = 0$, se obtiene la ecuación diferencial

$$\left[-\dot{B}' + \frac{f'}{f} \dot{B} \right] = 0. \quad (\text{A.7})$$

¹Las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada extra, ξ , y los puntos denotan derivadas con respecto al tiempo.

Esta ecuación se satisface si $B(t, \xi) = f(\xi)C(t)$ y sustituyendo en las componentes del Tensor de Einstein se obtiene

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{3}{f^2} \left[-\frac{\dot{C}^2}{C^2} + \frac{f''}{f} \right], & G_\xi^\xi &= \frac{3}{f^2} \left[2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{C}^2}{C^2} \right], \\ G_1^1 &= \frac{1}{f^2} \left[-2\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{C}^2}{C^2} + 3\frac{f''}{f} \right], & G_2^2 &= G_3^3 = G_1^1. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Adicionalmente se exige que Tensor de Einstein no dependa del tiempo, ya que el Tensor Energía-Impulso no depende del tiempo. Para ello se debe cumplir que

$$\frac{\ddot{C}}{C} = \beta^2 \quad (\text{A.9})$$

donde β es una constante mayor o igual a cero y su solución viene dada por

$$C(t) = e^{\beta t} \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo (A.10) en (A.8), se obtienen las siguientes expresiones para las componentes del Tensor de Einstein

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{3}{f^2} \left[\frac{f''}{f} - \beta^2 \right], & G_\xi^\xi &= \frac{6}{f^2} \left[\frac{f'^2}{f^2} - \beta^2 \right], \\ G_1^1 &= \frac{3}{f^2} \left[\frac{f''}{f} - \beta^2 \right], & G_2^2 &= G_3^3 = G_1^1. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

El tensor métrico de este sistema se expresa como

$$g_{ab} = f^2(\xi) \left(-dt_a dt_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_b^i \right) + f^2(\xi) d\xi_a d\xi_b \quad (\text{A.12})$$

De esta manera se obtiene la métrica dada por (1.4)

Apéndice B

Soluciones a la Ecuación de Sturm-Liouville

Una ecuación diferencial en la forma de Sturm-Liouville en general se escribe como

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + P(x)\frac{dy(x)}{dx} + Q(x)y(x) = r(x) . \quad (\text{B.1})$$

En el caso de (3.3),

$$g'' - g \left[\frac{1}{3}\phi'^2 + \beta^2 \right] = 0 , \quad (\text{B.2})$$

$P(x) = r(x) = 0$ y $Q(x) = \left[\frac{1}{3}\phi'^2 + \beta^2 \right]$.

Si se conoce una solución particular de (B.2), i.e. g_1 , entonces se puede hallar otra solución linealmente independiente, g_2 , a través de la expresión

$$g_2(\xi) = g_1(\xi)\chi(\xi), \quad \chi(\xi) = \int^{\xi} \frac{1}{[g_1(x)]^2} dx . \quad (\text{B.3})$$

Para demostrar esto, se calcula la primera y segunda derivada de g_2

$$g_2' = \frac{1}{g_1} + g_1' \int^{\xi} \frac{1}{[g_1]^2} dx \quad (\text{B.4})$$

$$g_2'' = g_1'' \int^{\xi} \frac{1}{[g_1]^2} dx \quad (\text{B.5})$$

Se sustituyen en la ecuación diferencial (B.2) y g_2 será solución si y sólo si

$$\left[g_1'' - g_1 \left(\frac{1}{3}\phi'^2 + \beta^2 \right) \right] \int^{\xi} \frac{1}{[g_1]^2} dx = 0 \quad (\text{B.6})$$

La cual se satisface ya que se conoce que g_1 es solución

$$g_1'' - g_1 \left[\frac{1}{3}\phi'^2 + \beta^2 \right] = 0 \quad (\text{B.7})$$

Con esto se ha demostrado que g_2 , definida por (3.4), es solución de (3.3).

Ahora se muestra que g_1 y g_2 son linealmente independientes. Para ello se calcula el Wronskiano para estas dos funciones

$$\begin{aligned} W(g_1, g_2) &= \det \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{bmatrix} \\ &= g_1 \left[\frac{1}{g_1} + g_1' \int^{\xi} \frac{1}{[g_1]^2} dx \right] - g_1' g_1 \int^{\xi} \frac{1}{[g_1]^2} dx \\ &= 1 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Como $W(g_1, g_2) \neq 0$ entonces g_1 y g_2 son linealmente independientes y la solución general a (B.2) viene dada por

$$g = c_1 g_1 + c_2 g_2 \tag{B.9}$$

Apéndice C

Perturbaciones Gravitacionales

C.1. Ecuaciones de Einstein en la forma de Ricci

Considérese las Ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab} . \quad (\text{C.1})$$

Multiplicando (C.1) por g^{da} se puede expresar el escalar de Ricci R en función del Tensor Energía-Impulso con índices contraídos $T \equiv g^{ab}T_{ab}$,

$$g^{da}R_{ab} - \frac{1}{2}g^{da}g_{ab}R = g^{da}T_{ab} , \quad (\text{C.2})$$

$$R_b^d - \frac{1}{2}\delta_b^d R = T_b^d . \quad (\text{C.3})$$

Haciendo $b = d$,

$$R - \frac{1}{2}\mathcal{D}R = T , \quad (\text{C.4})$$

conde $R \equiv g^{ab}R_{ab}$ y $\mathcal{D} = \delta_b^d$, siendo \mathcal{D} la dimensionalidad del espaciotiempo. Si $\mathcal{D} = 5$, entonces

$$R = -\frac{2}{3}T \quad (\text{C.5})$$

y las Ecuaciones de Einstein en la forma de Ricci se escriben como

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{3}g_{ab}T . \quad (\text{C.6})$$

C.2. \tilde{R}_{ab} en función de R_{ab}

Se quiere encontrar una expresión que relacione el tensor de Ricci de la métrica perturbada \tilde{R}_{ab} con el tensor de Ricci de la métrica sin perturbar R_{ab}

Para ello, considérese la definición del Tensor de Riemman $R_{abc}^f \omega_f$

$$R_{abc}^f \omega_f \equiv \nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c . \quad (\text{C.7})$$

El operador derivada actuando sobre una uno-forma $\nabla \omega_\gamma$ asociado a la métrica sin perturbar g_{ab} está relacionado con el operador derivada sobre una uno-forma $\tilde{\nabla} \omega_\gamma$ asociado a la métrica perturbada \tilde{g}_{ab} , a través de la expresión

$$\nabla_b \omega_c = \tilde{\nabla}_b \omega_c - C_{bc}^f \omega_f \quad (\text{C.8})$$

donde C_{bc}^f es el símbolo de Christoffel. Desarrollando el lado derecho de (C.7), utilizando C.8, se tiene

$$R_{abc}^f \omega_f = \nabla_a \left(\tilde{\nabla}_b \omega_c - C_{bc}^f \omega_f \right) - \nabla_b \left(\tilde{\nabla}_a \omega_c - C_{ac}^f \omega_f \right) \quad (\text{C.9})$$

y el primer término del lado derecho de esta expresión es

$$\nabla_a \left(\tilde{\nabla}_b \omega_c - C_{bc}^f \omega_f \right) = \nabla_a \tilde{\nabla}_b \omega_c - \nabla_a C_{bc}^f \omega_f - C_{bc}^f \nabla_a \omega_f \quad (\text{C.10})$$

mientras que el segundo término se obtiene por analogía.

Ahora bien, sabiendo que

$$\nabla_a T_{bc} = \tilde{\nabla}_a T_{bc} - C_{ab}^f T_{fc} - C_{ac}^f T_{bf} , \quad (\text{C.11})$$

$$\nabla_a T_{bc}^f = \tilde{\nabla}_a T_{bc}^f + C_{ad}^f T_{bc}^d - C_{ab}^d T_{dc}^f - C_{ac}^d T_{bd}^f , \quad (\text{C.12})$$

las cuales son las extensiones de (C.8), se pueden desarrollar todos los términos de (C.10) y sustituir en (C.9), obteniéndose

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = \left(\tilde{R}_{abc}^f - 2\tilde{\nabla}_{[a} C_{b]c}^f - 2C_{[ad}^f C_{b]c}^d \right) \omega_f , \quad (\text{C.13})$$

donde

$$\tilde{R}_{abc}^f \omega_f \equiv \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \omega_c - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a \omega_c \quad (\text{C.14})$$

$$\tilde{\nabla}_{[a} C_{b]c}^f \equiv \frac{1}{2} \left(\tilde{\nabla}_a C_{bc}^f - \tilde{\nabla}_b C_{ac}^f \right) , \quad C_{[ac}^d C_{b]d}^f \equiv \frac{1}{2} \left(C_{ac}^d C_{bd}^f - C_{bc}^d C_{ad}^f \right) \quad (\text{C.15})$$

y se desprende que

$$R_{abc}^f = \tilde{R}_{abc}^f - 2\tilde{\nabla}_{[a} C_{b]c}^f + 2C_{[ac}^d C_{b]d}^f . \quad (\text{C.16})$$

Haciendo la contracción del Tensor de Riemman, se obtiene el Tensor de Ricci

$$\tilde{R}_{ac} = \tilde{R}_{abc}^b = R_{ac} - 2\nabla_{[a} \tilde{C}_{b]c}^b + 2\tilde{C}_{c[a}^d \tilde{C}_{b]d}^b \quad (\text{C.17})$$

De esta manera se ha logrado hallar una expresión que relaciona el tensor de Ricci perturbado \tilde{R}_{ab} con el tensor de Ricci sin perturbar R_{ab} .

C.3. Ecuaciones Einstein-Campo Escalar de h_{ab}

El propósito de esta sección es ilustrar detalladamente el procedimiento empleado para hallar las ecuaciones que describen el comportamiento de la perturbación gravitacional h_{ab} .

Sea g_{ab} y ϕ las soluciones exactas al sistema Einstein-Campo Escalar formado por (1.1), (1.2) y (1.3). Ahora suponga que existe una familia uniparamétrica de tensores métricos $\tilde{g}_{ab}(\lambda)$ y una familia uniparamétrica de campos escalares $\tilde{\phi}(\lambda)$ tal que también sean solución del sistema Einstein-Campo Escalar dados por ¹

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \lambda h_{ab} , \quad \tilde{\phi} = \phi + \lambda \varphi , \quad (\text{C.18})$$

donde h_{ab} y φ representan la perturbación de la métrica y el campo escalar, respectivamente. De tal manera que a primer orden se tiene

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ab} \right|_{\lambda=0} = h_{ab}, \quad \left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{\phi} \right|_{\lambda=0} = \varphi . \quad (\text{C.19})$$

Las ecuaciones de Einstein-Campo Escalar, escritas en la forma de Ricci, para \tilde{g}_{ab} están dadas por²

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{T}_{ab} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ab} \tilde{T} , \quad (\text{C.20})$$

$$\tilde{T}_{ac} = \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ac} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_d \tilde{\phi} + V(\tilde{\phi}) \right] \quad (\text{C.21})$$

donde $\tilde{T} = \tilde{g}^{ab} \tilde{T}_{ab}$. Mientras que para el campo escalar perturbado $\tilde{\phi}$, se tiene

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \frac{d\tilde{V}(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}} = 0 . \quad (\text{C.22})$$

Se desea hallar las ecuaciones que describen la dinámica de la perturbación h_{ab} a primer orden. Para ello, diferenciamos (C.20) con respecto a λ y hacemos $\lambda = 0$,

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ab} \right|_{\lambda=0} - \frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ab} \tilde{T} \right]_{\lambda=0} . \quad (\text{C.23})$$

Cada uno de estos términos será desarrollados a continuación.

¹ El tensor métrico con índices superiores está dado por $\tilde{g}^{ab} = g^{ab} - \lambda h^{ab}$, satisfaciendo $\tilde{g}_{da} \tilde{g}^{ae} = \delta_d^e$ para perturbaciones a primer orden.

²Ver Apéndice C.1 para detalles de las Ecuaciones de Einstein escritas en la forma de Ricci en 5 dimensiones.

C.3.1. Desarrollo de $\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ab} \right|_{\lambda=0}$

En el Apéndice (C.2) se obtuvo una expresión que relaciona el tensor de Ricci perturbado \tilde{R}_{ab} con el tensor de Ricci sin perturbar R_{ab} ,

$$\tilde{R}_{ac} = R_{ac} - 2\nabla_{[a}\tilde{C}_{b]c}^b + 2\tilde{C}_{c[a}^d\tilde{C}_{b]d}^b. \quad (\text{C.24})$$

Derivando esta expresión con respecto a λ y evaluando en $\lambda = 0$,

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ac} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} R_{ac} \right|_{\lambda=0} - 2 \left. \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_{[a}\tilde{C}_{b]c}^b \right] \right|_{\lambda=0} + 2 \left. \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{C}_{c[a}^d\tilde{C}_{b]d}^b \right] \right|_{\lambda=0}. \quad (\text{C.25})$$

El primer término del lado derecho es cero porque no depende de λ y el tercer término también se hace cero puesto que

$$\tilde{C}_{ab}^d = \frac{1}{2}\tilde{g}^{dc} (\nabla_a\tilde{g}_{cb} + \nabla_b\tilde{g}_{ac} - \nabla_c\tilde{g}_{ab}), \quad (\text{C.26})$$

$$\tilde{C}_{ab}^d = \frac{1}{2}\tilde{g}^{dc} (\nabla_a(g_{cb} + \lambda h_{cb}) + \nabla_b(g_{ac} + \lambda h_{ac}) - \nabla_c(g_{ab} + \lambda h_{ab})), \quad (\text{C.27})$$

y evaluando (C.27) en $\lambda = 0$ y sabiendo que $\nabla_c g_{ab} = 0$, se tiene que $\tilde{C}_{ab}^d|_{\lambda=0} = 0$. Entonces (C.25) se reduce a

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ac} \right|_{\lambda=0} = - \left. \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_a\tilde{C}_{bc}^b - \nabla_b\tilde{C}_{ac}^b \right] \right|_{\lambda=0} \quad (\text{C.28})$$

donde el primer término del lado derecho de (C.28) es³

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_a\tilde{C}_{bc}^b \right] \right|_{\lambda=0} &= \left. \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_a \left[\frac{1}{2}\tilde{g}^{dc} (\nabla_a\tilde{g}_{cb} + \nabla_b\tilde{g}_{ac} - \nabla_c\tilde{g}_{ab}) \right] \right] \right|_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{2}g^{bd} (\nabla_a\nabla_b h_{dc} + \nabla_a\nabla_c h_{bd} - \nabla_a\nabla_d h_{bc}) \\ &= \frac{1}{2}g^{bd} (\nabla_a\nabla_c h_{bd}) \\ &= \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_c (g^{bd} h_{bd}) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

y el segundo término del lado derecho de (C.28) es

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_b\tilde{C}_{ac}^b \right] \right|_{\lambda=0} &= \frac{1}{2}g^{bd} (\nabla_b\nabla_a h_{cd} + \nabla_b\nabla_c h_{ad} - \nabla_b\nabla_d h_{ac}) \\ &= -\frac{1}{2}\square h_{ac} + g^{bd}\nabla_b\nabla_c h_{ac} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

³ considerando que $\nabla_a g^{bc} = 0$

donde,

$$\square h_{ac} \equiv g^{bd} \nabla_b \nabla_d h_{ac} , \quad \nabla_b \nabla_{(a} h_{c)d} \equiv \frac{1}{2} (\nabla_b \nabla_a h_{cd} + \nabla_b \nabla_c h_{ad}) . \quad (\text{C.31})$$

Sustituyendo (C.29) y (C.30) en (C.28), se tiene

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ac} |_{\lambda=0} = -\frac{1}{2} \square h_{ac} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_c (g^{bd} h_{bd}) + g^{bd} \nabla_b \nabla_{(a} h_{c)d} . \quad (\text{C.32})$$

Ahora bien, se desea expresar

$$g^{bd} \nabla_b \nabla_{(a} h_{c)d} \equiv \frac{1}{2} g^{bd} (\nabla_b \nabla_a h_{cd} + \nabla_b \nabla_c h_{ad}) \quad (\text{C.33})$$

en función del tensor de Riemman. Para ello, nótese que por inducción, a partir de (C.7), se conoce que

$$(\nabla_e \nabla_a - \nabla_a \nabla_e) h_{cd} = R_{eac}^f h_{fd} + R_{ead}^f h_{cf} \quad (\text{C.34})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} g^{be} \nabla_e \nabla_a h_{cd} &= g^{be} \nabla_a \nabla_e h_{cd} + g^{be} R_{eac}^f h_{fd} + g^{be} R_{ead}^f h_{cf} \\ \nabla^b \nabla_a h_{cd} &= \nabla_a \nabla^b h_{cd} + R_{ac}^{bf} h_{fd} + R_{ad}^{bf} h_{cf} \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Haciendo $b = d$,

$$\nabla^b \nabla_a h_{cb} = \nabla_a \nabla^b h_{cb} + R_{ac}^{bf} h_{fb} + R_{ab}^{bf} h_{cf} \quad (\text{C.36})$$

De tal forma que,

$$g^{bd} \nabla_b \nabla_{(a} h_{c)d} = \nabla^b \nabla_{(a} h_{c)b} = \nabla_{(a} \nabla^b h_{c)b} + R_{(ac)}^{bf} h_{fb} + R_{(ab)}^{bf} h_{cf} \quad (\text{C.37})$$

Finalmente, se sustituye en (C.32) y se obtiene el primer término de (C.23)

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ac} |_{\lambda=0} = -\frac{1}{2} \square h_{ac} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_c (g^{bd} h_{bd}) + \nabla_{(a} \nabla^b h_{c)b} + R_{(ac)}^{bf} h_{fb} + R_{(ab)}^{bf} h_{cf} . \quad (\text{C.38})$$

C.3.2. Desarrollo de $\left. \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ab} \right|_{\lambda=0}$

El Tensor Energía-Impulso para la métrica perturbada \tilde{g}_{ab} está dado por

$$\tilde{T}_{ac} = \nabla_a \tilde{\phi} \nabla_b \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ac} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} \nabla_b \tilde{\phi} \nabla_d \tilde{\phi} + V(\tilde{\phi}) \right] , \quad (\text{C.39})$$

entonces diferenciando con respecto a λ y evaluando en $\lambda = 0$,

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ac} |_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_a \tilde{\phi} \nabla_c \tilde{\phi} \right]_{\lambda=0} - \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ac} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} \nabla_b \tilde{\phi} \nabla_d \tilde{\phi} \right] \right]_{\lambda=0} + \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ac} V(\tilde{\phi}) \right]_{\lambda=0} \quad (\text{C.40})$$

donde el primer término del lado derecho de (C.40) es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\nabla_a \tilde{\phi} \nabla_c \tilde{\phi} \right]_{\lambda=0} &= \left[\nabla_a \frac{d}{d\lambda} \tilde{\phi} \nabla_c \tilde{\phi} + \nabla_a \tilde{\phi} \nabla_c \frac{d}{d\lambda} \tilde{\phi} \right]_{\lambda=0} \\ &= \nabla_a \varphi \nabla_c \phi + \nabla_a \phi \nabla_c \varphi \\ &= 2\nabla_{(a} \varphi \nabla_{c)} \phi ; \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

el segundo término del lado derecho de (C.40) es

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ac} \left[\tilde{g}^{bd} \nabla_b \tilde{\phi} \nabla_d \tilde{\phi} \right] \right] = \frac{1}{2} h_{ac} g^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi - \frac{1}{2} g_{ac} h^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi + g_{ac} g^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi ; \quad (\text{C.42})$$

y el tercer término del lado derecho de (C.40) es simplemente

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ac} V(\tilde{\phi}) \right] = h_{ac} V(\phi) + g_{ac} \frac{dV}{d\phi} \varphi. \quad (\text{C.43})$$

Finalmente, sustituyendo (C.41), (C.42) y (C.43) en (C.40), se obtiene $\frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ac} |_{\lambda=0}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ac} \Big|_{\lambda=0} &= 2\nabla_{(a} \varphi \nabla_{c)} \phi - \frac{1}{2} h_{ac} g^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi + \frac{1}{2} g_{ac} h^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi \\ &\quad - g_{ac} g^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi - h_{ac} V(\phi) - g_{ac} \frac{dV}{d\phi} \varphi \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

C.3.3. Desarrollo de $-\frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ac} \tilde{T}_b^b \right]_{\lambda=0}$

Aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}_{ac} \tilde{T}_b^b \right] &= -\frac{1}{3} \left[\frac{d}{d\lambda} \tilde{g}_{ac} \tilde{T}_b^b + \tilde{g}_{ac} \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_b^b \right] \\ &= -\frac{1}{3} \left[h_{ac} \tilde{T}_b^b + \tilde{g}_{ac} \frac{d}{d\lambda} \left[\tilde{g}^{bd} \tilde{T}_{bd} \right] \right] \\ &= -\frac{1}{3} \left[h_{ac} \tilde{T}_b^b - g_{ac} h^{bd} \tilde{T}_{bd} + g_{ac} g^{bd} \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{bd} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Desarrollando cada una de estos términos

$$-\frac{1}{3} h_{ac} \tilde{T}_b^b = -\frac{1}{3} h_{ac} \tilde{g}^{bd} \tilde{T}_{bd} = -\frac{1}{3} g^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi + \frac{1}{6} h_{ac} D g^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi + \frac{1}{3} h_{ac} D V(\phi) \quad (\text{C.46})$$

$$\frac{1}{3} g_{ac} h^{bd} \tilde{T}_{bd} = \frac{1}{3} g_{ac} h^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi - \frac{1}{6} g_{ac} (h^{bd} g_{bd}) g^{mn} \nabla_m \phi \nabla_n \phi - \frac{1}{3} g_{ac} (h^{bd} g_{bd}) V(\phi) \quad (\text{C.47})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} g_{ac} g^{bd} \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{bd} &= -\frac{2}{3} g_{ac} g^{bd} \nabla_{(b} \varphi \nabla_{d)} \phi + \frac{1}{6} g_{ac} (g^{bd} h_{bd}) g^{mn} \nabla_m \phi \nabla_n \phi \\ &\quad - \frac{1}{6} g_{ac} D h^{mn} \nabla_m \phi \nabla_n \phi + \frac{1}{3} g_{ac} D g^{mn} \nabla_m \varphi \nabla_n \phi \\ &\quad + \frac{1}{3} g_{ac} (g^{bd} h_{bd}) V(\phi) + \frac{1}{3} g_{ac} D \frac{dV}{d\phi} \varphi . \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

C.3.4. Simplificaciones

Sustituyendo (C.38), (C.44) y (C.45) en (C.23) y simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\square h_{ac} - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_c(g^{bd}h_{bd}) + \nabla_{(a}\nabla^b h_{c)b} + R_{(ac)}^{bd}h_{bd} + R_{(ad)}^{bd}h_{c)b} = \\
+ 2\nabla_{(a}\varphi\nabla_{c)}\varphi + \frac{D-5}{6}h_{ac}g^{bd}\nabla_b\phi\nabla_d\phi - \frac{D-5}{6}g_{ac}h^{bd}\nabla_b\phi\nabla_d\phi \\
+ \frac{D-5}{3}g_{ac}g^{bd}\nabla_b\varphi\nabla_d\phi + \frac{D-3}{3}h_{ac}V(\phi) + \frac{D-3}{3}g_{ac}\frac{dV}{d\phi}\varphi
\end{aligned} \quad (C.49)$$

Imponiendo las condiciones de traza, sector transverso, y calibre axial nulo; respectivamente,

$$g^{ab}h_{ab} = 0 ; \quad \nabla_a h_b^a = 0 ; \quad h_{a4} = 0, \quad (C.50)$$

y haciendo $\varphi = 0$, $\phi = \phi(\xi)$ y $\mathcal{D} = 5$, se tiene

$$-\frac{1}{2}\square h_{ac} + R_{(ac)}^{bd}h_{bd} + R_{(ad)}^{bd}h_{c)b} = \frac{2}{3}h_{ac}V(\phi). \quad (C.51)$$

C.3.5. En particular para h_{tt}

En esta sección se desarrolla (C.51) para la componente tt de la perturbación h_{ab} .

Para la métrica general dada por

$$g_{ab} = f^2(\xi) \left\{ -dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_a^i \right\}, \quad (C.52)$$

se calcula la traza,

$$g^{ab}h_{ab} = \frac{1}{f^2 e^{2\beta t}} \left[-h_{tt} e^{2\beta t} + h_{11} + h_{22} + h_{33} \right], \quad (C.53)$$

y la componente tt del sector transverso viene dado por

$$\nabla_a h_t^a = \frac{-1}{f^2 e^{2\beta t}} \left[\frac{\partial h_{tt}}{\partial t} e^{2\beta t} - \frac{\partial h_{t1}}{\partial x} - \frac{\partial h_{t2}}{\partial y} - \frac{\partial h_{t3}}{\partial z} + \beta (3h_{tt} e^{2\beta t} + h_{11} + h_{22} + h_{33}) \right]. \quad (C.54)$$

Mientras que el D'Alambertiano 5-dimensional $\square_{(5)} h_{tt}$,

$$f^2 e^{2\beta t} \square_{(5)} h_{tt} = -8\beta^2 h_{tt} e^{2\beta t} - 7\beta \frac{\partial h_{tt}}{\partial t} e^{2\beta t} - \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial t^2} e^{2\beta t} \quad (C.55)$$

$$+ \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial z^2} - 2h_{tt} \frac{f'^2}{f} e^{2\beta t} \quad (C.56)$$

$$- \frac{f'}{f} \frac{\partial h_{tt}}{\partial \xi} e^{2\beta t} + \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial \xi^2} e^{2\beta t} - 2h_{tt} \frac{f''}{f} e^{2\beta t}; \quad (C.57)$$

y el D'Alambertiano 4-dimensional $\square_{(4)} h_{tt}$,

$$\square_{(4)} h_{tt} = \frac{1}{e^{2\beta t}} \left[-8\beta^2 h_{tt} e^{2\beta t} - 7\beta \frac{\partial h_{tt}}{\partial t} e^{2\beta t} - \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial t^2} e^{2\beta t} + \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial z^2} \right]. \quad (C.58)$$

Así que $\square_{(5)}h_{tt}$ se puede escribir en función de $\square_{(4)}h_{tt}$ de la siguiente forma

$$\square_{(5)}h_{tt} = \frac{1}{f^2} \left[\square_{(4)}h_{tt} - 2h_{tt} \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \frac{\partial h_{tt}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_{tt}}{\partial \xi^2} - 2h_{tt} \frac{f''}{f} \right]. \quad (\text{C.59})$$

Por otra parte, la componente tt asociadas a $R_{(ac)}^{bd}h_{bd} + R_{(ad)}^{bd}h_{cb}$

$$R_{(tt)}^{bd}h_{bd} + R_{(td)}^{bd}h_{tb} = \frac{1}{f^4 e^{2\beta t}} [\beta^2 f^2 (3h_{tt}e^{2\beta t} + h_{11} + h_{22} + h_{33}) - f'^2 (2h_{tt}e^{2\beta t} + h_{11} + h_{22} + h_{33}) - h_{tt} f f'' e^{2\beta t}]. \quad (\text{C.60})$$

Identificando la traza y haciéndola igual a cero $g^{ab}h_{ab} = 0$, se tiene

$$R_{(tt)}^{bd}h_{bd} + R_{(td)}^{bd}h_{tb} = \frac{1}{f^2} \left[4\beta^2 - 3\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} \right] h_{tt}. \quad (\text{C.61})$$

Sustituyendo (C.61) y $V(\phi)$ dado por (1.8) en (C.51), se obtiene

$$\frac{1}{f^2} \left[\square_{(4)} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{f'}{f} \frac{\partial}{\partial \xi} - 2\frac{f''}{f} - 2\beta^2 \right] h_{tt} = 0 \quad (\text{C.62})$$

Esta expresión describe el comportamiento de la perturbación gravitacional h_{tt} .

C.3.6. Generalización

Se puede mostrar que (C.62) posee la misma estructura para todas las componentes de la perturbación, de tal manera que se puede generalizar

$$\frac{1}{f^2} \left[\square_{(4)} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{f'}{f} \frac{\partial}{\partial \xi} - 2\frac{f''}{f} - 2\beta^2 \right] h_{ab} = 0 \quad (\text{C.63})$$

Esta última expresión representa las Ecuaciones Einstein-Campo Escalar para todas las componentes de la perturbación gravitacional h_{ab} .

Apéndice D

Autovalores del operador $Q^\dagger Q$

Se tiene un vector dado por $|Q|\psi\rangle$, que cumple con la ecuación de autovalores

$$Q^\dagger Q|\psi\rangle = \tilde{m}^2|\psi\rangle, \quad (\text{D.1})$$

cuya norma debe ser mayor o igual a cero,

$$\|Q|\psi\rangle\|^2 \geq 0. \quad (\text{D.2})$$

Por definición la norma de un vector se puede escribir como

$$(Q|\psi\rangle)^\dagger (Q|\psi\rangle) \geq 0 \quad (\text{D.3})$$

y sabiendo que $(Q|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|Q^\dagger$, entonces

$$\langle\psi|Q^\dagger Q|\psi\rangle \geq 0. \quad (\text{D.4})$$

Luego, utilizando la ecuación (D.1) se tiene

$$\langle\psi|\tilde{m}^2|\psi\rangle \geq 0. \quad (\text{D.5})$$

Finalmente,

$$\tilde{m}^2\langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \quad (\text{D.6})$$

Como $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$, se concluye que $\tilde{m}^2 \geq 0$ [17].

Apéndice E

Límite de pared delgada de soluciones dinámicas

E.1. Solucion regular

Sea el factor métrico dado por

$$f = \cosh^{-\delta}\left(\frac{\beta\xi}{\delta}\right) \quad (\text{E.1})$$

donde $\delta > 0$ se interpreta como el ancho de la pared.

Se desea tomar el límite de pared delgada de este factor métrico. Es decir $\delta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \cosh^{-\delta}\left(\frac{\beta\xi}{\delta}\right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-\frac{\beta\xi}{\delta}} + e^{\frac{\beta\xi}{\delta}}}{2} \right]^{-\delta} \quad (\text{E.2})$$

Notando que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f = e^{-\beta\xi}; \quad \xi > 0 \quad (\text{E.3})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f = e^{\beta\xi}; \quad \xi < 0 \quad (\text{E.4})$$

Entonces el límite de pared delgada de f está dado por

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f = e^{-\beta|\xi|} \quad (\text{E.5})$$

E.2. Solución general

En la Sección 4.1.2 se mostró una familia de soluciones asimétrica, cuyo inverso del factor warp viene dado por

$$g(\xi) = c_1 \cosh^\delta(\beta\xi/\delta) + c_2 \frac{i\delta}{\beta - 2\beta\delta} \frac{|\sinh(\beta\xi/\delta)|}{\sinh(\beta\xi/\delta)} \cosh^{1-\delta}(\beta\xi/\delta) {}_2F_1[l, k, n, \cosh^2(\beta\xi/\delta)] \quad (\text{E.6})$$

Para esta familia de soluciones se desea igualmente obtener el límite de pared delgada por razones fenomenológicas. Para ello, se toma el límite cuando $\delta \rightarrow 0$

Para calcular este límite se utiliza la siguiente identidad que satisface la función hipergeométrica ${}_2F_1$,

$${}_2F_1[a, b, c, z] = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left[a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right] \quad (\text{E.7})$$

Identificando los parámetros para el caso particular de estudio

$$a = l = \frac{1}{2} - \delta, \quad b = k = 1 - \delta, \quad c = n = \frac{3}{2} - \delta, \quad z = [\cosh(\beta\xi/\delta)]^\delta, \quad (\text{E.8})$$

y aplicando la identidad y simplificando,

$$g(\xi) = c_1 \cosh^\delta(\beta\xi/\delta) + c_2 \frac{\delta(-1)^\delta}{\beta - 2\beta\delta} \cosh(\beta\xi/\delta)^{1-\delta} \sinh(\beta\xi/\delta)^{2\delta-1} {}_2F_1\left[\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta, \coth(\beta\xi/\delta)^2\right]. \quad (\text{E.9})$$

Se define $x = \coth(\beta\xi/\delta)^2$ y nótese que cuando $\delta \rightarrow 0$, entonces $x \rightarrow 1$. Ahora se expande la función hipergeométrica alrededor de $x = 1$ a orden 0,

$${}_2F_1\left[\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta, x\right] \approx \Gamma\left(\frac{3}{2} - \delta\right) \left[(1-x)^\delta \frac{\Gamma(-\delta)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \delta) \Gamma(1 - \delta)} + \frac{\Gamma(\delta)}{\sqrt{\pi}} \right]. \quad (\text{E.10})$$

Luego, expandiendo en series alrededor de $\delta = 0$,

$${}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right] \approx \frac{1}{2\delta} [-(1-x)^\delta + 1]. \quad (\text{E.11})$$

Sustituyendo en (E.10) y simplificando, se obtiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} g(\xi) = c_1 e^{\beta|\xi|} + \frac{c_2}{\beta} \sinh(\beta\xi) \quad (\text{E.12})$$

Apéndice F

Cálculo de V_{QM} en límite de pared delgada

F.1. Solución regular

El potencial mecánico cuántico está dado por

$$V_{QM} = \frac{3}{4} \frac{f'^2}{f^2} + \frac{3}{2} \frac{f''}{f} . \quad (\text{F.1})$$

La primera derivada de (E.1),

$$f' = -\beta e^{-\beta|\xi|} \frac{d|\xi|}{d\xi} , \quad \frac{d|\xi|}{d\xi} = \Theta(\xi) - \Theta(-\xi) , \quad (\text{F.2})$$

donde $\Theta(\xi)$ es la función Heaviside. Mientras que su segunda derivada

$$f'' = -\beta^2 e^{-\beta|\xi|} \left[\frac{d|\xi|}{d\xi} \right]^2 - \beta e^{-\beta|\xi|} \frac{d^2|\xi|}{d\xi^2} \quad (\text{F.3})$$

$$\left[\frac{d|\xi|}{d\xi} \right]^2 = \Theta(\xi) + \Theta(-\xi) = 1 \quad (\text{F.4})$$

$$\frac{d^2|\xi|}{d\xi^2} = 2\delta(\xi) \quad (\text{F.5})$$

$$f'' = -\beta^2 e^{-\beta|\xi|} - 2\beta\delta(\xi) . \quad (\text{F.6})$$

Sustituyendo (F.2) y (F.6) en (F.1), se tiene

$$V_{QM} = \frac{9}{4} \beta^2 - 3\beta\delta(\xi) \quad (\text{F.7})$$

donde $\delta(\xi)$ es la delta de Dirac.

F.2. Solución general

Para hallar el potencial mecánico cuántico, se reescribe (F.1) en función de $g(\xi)$, haciendo el cambio $f(\xi) = 1/g(\xi)$,

$$V_{QM} = \frac{15}{4} \frac{g'^2}{g^2} - \frac{3}{2} \frac{g''}{g}, \quad (\text{F.8})$$

y se calculan la primera y segunda derivada de g ,

$$g' = c_1 \beta e^{\beta|\xi|} [\Theta(\xi) - \Theta(-\xi)] + c_2 \cosh(\beta\xi), \quad (\text{F.9})$$

$$g'' = c_1 \beta^2 e^{\beta|\xi|} + 2\beta c_1 \delta(\xi) + c_2 \beta \sinh(\beta\xi), \quad (\text{F.10})$$

obteniéndose,

$$V_{QM} = \frac{15\beta^2}{4} \left[\frac{c_1 \beta e^{\beta|\xi|} (\Theta(\xi) - \Theta(-\xi)) + c_2 \cosh(\beta\xi)}{c_1 \beta e^{\beta|\xi|} + c_2 \sinh(\beta\xi)} \right]^2 - \frac{3}{2} \beta^2 - 3\beta\delta(\xi). \quad (\text{F.11})$$

Nótese que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} V_{QM} = \frac{9}{4} \beta^2. \quad (\text{F.12})$$

Bibliografía

- [1] L. Randall and R. Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999. hep-th/9906064.
- [2] M. Ito. Localized gravity on de sitter brane in five dimensions. *Europhys. Lett.*, 64:295–301, 2003. hep-th/0204113.
- [3] K. Ghoroku, A. Nakamura, and M. Yahiro. Newton’s law in de sitter brane. *Phys. Lett.*, B571:223–228, 2003. hep-th/0303068.
- [4] Iver Brevik, Kazuo Ghoroku, Sergei D. Odintsov, and Masanobu Yahiro. Localization of gravity on brane embedded in ads(5) and ds(5). *Phys. Rev.*, D66:064016, 2002.
- [5] A. Kehagias and K. Tamvakis. Graviton localization and newton law for a ds(4) brane in 5d bulk. *Class. Quant. Grav.*, 19:L185, 2002.
- [6] G. Goetz. An exact solution for a thick domain wall. *J. Math. Phys.*, 31:2683, 1990.
- [7] A. z. Wang. Thick de sitter brane worlds, dynamic black holes and localization of gravity. *Phys. Rev.*, D66:024024, 2002. hep-th/0201051.
- [8] R. Guerrero, A. Melfo, and N. Pantoja. Self-gravitating domain walls and the thin-wall limit. *Phys. Rev.*, D65:125010, 2002. gr-qc/0202011.
- [9] R. Guerrero, R. O. Rodriguez, and R. Torrealba. de sitter and double asymmetric brane worlds. *Phys. Rev.*, D72:124012, 2005. hep-th/0510023.
- [10] M. Gremm. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. *Phys. Lett.*, B478:434–438, 2000. hep-th/9912060.
- [11] D. Bazeia, C. Furtado, and A. R. Gomes. Brane structure from scalar field in warped spacetime. *JCAP*, 0402:002, 2004. hep-th/0308034.
- [12] A. Melfo, N. Pantoja, and A. Skirzewski. Thick domain wall spacetimes with and without reflection symmetry. *Phys. Rev.*, D67:105003, 2003. gr-qc/0211081.
- [13] O. Castillo-Felisola, A. Melfo, N. Pantoja, and A. Ramirez. Localizing gravity on exotic thick 3-branes. *Phys. Rev.*, D70:104029, 2004. hep-th/0404083.
- [14] R. M. Wald. General relativity. Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p.

- [15] R. Guerrero, R. O. Rodriguez, R. Torrealba, and R. Ortiz. De sitter and double irregular domain walls. *Gen. Rel. Grav.*, 38:845–855, 2006. gr-qc/0504080.
- [16] Nelson Pantoja and Alberto Sanoja. Symmetries of distributional domain wall geometries. *J. Math. Phys.*, 46:033509, 2005. gr-qc/0312032.
- [17] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. *Quantum Mechanics*, volume I. Wiley, John & Sons, 1998.