

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA
MAESTRIA EN CIENCIAS

ESPACIO-TIEMPOS DEL TIPO PARED DE DOMINIO

Trabajo presentado para optar al grado de
Magister Scientiarum

Por: Rubén Alí Ortiz Rojas

Barquisimeto, 2005

Agradecimientos

En primera instancia a “mis mujeres”: mi abuela, mi madre, mis tías, quienes con su amor, esfuerzo y dedicación contibuyeron a formar el ser humano que soy.

A mis hijos, por darme ese impulso vital por trascender los límites del tiempo.

A mi esposa Virginia, sin cuyo amor transitar esta vida sería más difícil.

A mis compañeros y profesores: Rommel, Rafael, Freddy, Omar, Genaro, Wilfredo, Joyné por su guía, apoyo y orientación a lo largo de este trabajo, y

Por supuesto, a la Sra. Karmela sin cuyo apoyo y colaboración hubiera sido más difícil recorrer los diversos vericuetos administrativos de este postgrado.

A todos, Gracias.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	IV
I. Sistema acoplado Einstein-Campo escalar	1
I.1. Paredes de dominio	1
I.1.1. Transiciones de fase de segundo tipo	3
I.1.2. Defectos topológicos y ruptura espontánea de simetrías	4
I.2. Solución tipo pared de dominio	5
I.2.1. La solución de Goetz	8
I.2.2. La solución de Gass y Mukherjee	9
I.2.3. La solución de Guerrero, Melfo y Pantoja	11
I.3. La solución de la ecuación de sine-Gordon	12
II. Otras soluciones al sistema acoplado	14
II.1. Soluciones re-escaladas	15
II.2. Otra solución tipo Pared de Dominio	17
II.3. Soluciones con y sin simetría de reflexión	19

II.3.1. A. Soluciones estáticas con $C = C(\xi) \equiv e^{g(\xi)}$	20
II.3.2. B. Soluciones dinámicas con $C = C(t) \equiv e^{h(t)}$	21
II.4. Otra familia de soluciones tipo pared de dominio	22
III. Nuevas soluciones al sistema acoplado	25
III.1. Un nuevo método para obtener soluciones	26
III.2. Aplicación del método para obtener nuevas soluciones	28
IV. Campos dependientes del tiempo	42
IV.1. Una solución tipo sine-Gordon	43
IV.2. Una métrica dinámica	44
IV.3. Solución del tipo onda viajera	47
Conclusiones	50
Apéndice	52
Referencias bibliográficas	54

Introducción

Las *paredes de dominio* son soluciones al sistema acoplado de ecuaciones Einstein-campo escalar donde el campo interpola entre mínimos degenerados de un potencial con un *rompimiento espontáneo de una simetría discreta*. Este tipo de *defecto topológico* ha sido objeto de estudio en muchas áreas de la física tales como la física de partículas, la cosmología y la física de la materia condensada. Recientemente, sin embargo, las *paredes de dominio* han adquirido nueva relevancia al constituirse en elementos fundamentales dentro de escenarios que se muestran como posibles alternativas a los modelos de compactificación de las dimensiones del espacio-tiempo y en los cuales se desarrollan las más novedosas teorías de unificación de las fuerzas y partículas [1].

Apenas surgieron los primeros esbozos del llamado modelo estándar de unificación de la fuerza débil y el electromagnetismo, cuya base es la *ruptura espontánea de las simetrías*, se hicieron las primeras aplicaciones a la cosmología [2] [3]; allí se mostró que la evolución de las paredes llevaría a contradicciones con las observaciones astronómicas referentes al fondo de radiación de micro-ondas; esto hizo que dichos objetos se relegaran a un lado quedando sólo como posibles modelos teóricos de los defectos topológicos que se crearon en las tempranas etapas de formación del universo en las llamadas etapas de *transición de fases*. Más tarde, en el contexto de los estudios de los modelos inflacionarios, adquirieron importancia cuando surgió un nuevo escenario de formación de galaxias. En dicho escenario las “semillas” para la formación de las galaxias son los defectos topológicos (*pa-*

redes de dominio) que se produjeron durante una transición de fases después de recombinarse la materia y la radiación. Tal transición de fase sería iniciada por la ruptura de una simetría discreta de un campo escalar [4], y estas *paredes de dominio* proveerían el campo gravitacional necesario para el agrupamiento de la materia oscura y los bariones al producirse la recombinación.

Los primeros intentos por determinar el campo gravitacional, y por ende el espacio-tiempo, de las *paredes de dominio gruesas*, tanto planas como esféricas, fueron efectuados por Widrow [5]; mientras que Vilenkin determinó el campo gravitacional de las *paredes de dominio infinitamente delgadas* [6], (ver también Ipser y Sikivie [7]). La primera solución exacta al acoplamiento Einstein-campo escalar que describe una *pared de dominio gruesa* con una distribución de campo escalar tipo “kink” lo logra Goetz en 1990, [8]. Posteriormente Gass y Mukherjee [9], encuentran una nueva clase de soluciones tipo pared de dominio que son estáticas y no poseen simetría de reflexión y que, consecuentemente, tienen diferentes vacíos asintóticos a ambos lados de la pared.

En el año 1999 Randall y Sundrum [1], siguiendo una conjetura de Rubakov y Shaposhnikov [10], quienes planteaban la posibilidad de que nuestro universo podría ser representado por una pared de dominio infinitamente delgada “inmerso” en un espacio de mayor dimensión, publican dos artículos en los cuales concretizan esta idea. En estos artículos ellos proponen un nuevo escenario para la compactificación de las dimensiones extras que aparecen en los modelos de unificación de partículas; este escenario permite confinar la gravedad sobre la pared con lo cual no viola lo medido experimentalmente, en cuanto a lo que conocemos sobre la ley del inverso al cuadrado para la gravitación, a la vez que permite integrar la gravitación en el esquema de unificación al no entrar en contradicción con el modelo estándar que funciona sólo en 4 dimensiones.

El *escenario Randall-Sundrum* propone que el universo (3+1)-dimensional existe sobre una hipersuperficie 4-dimensional embebida en un espacio-tiempo de 5 dimensiones. Dicha superficie, a su vez, sería una pared de dominio infinitamente

delgada o 3-brana, donde el 3 indica el número de dimensiones espaciales sobre la pared o brana. La coordenada extra es de tipo espacio y no necesariamente pequeña como en los demás modelos que incluyen coordenadas adicionales para el espacio-tiempo.

Ahora bien, el hecho de que el escenario planteado para el universo por Randall y Sundrum se basa en una pared infinitamente delgada, da pie a que se estudien aquellas soluciones al acoplamiento Einstein-campo escalar que representen *paredes de dominio gruesas* que puedan tener un límite de pared delgada. Si se logra hallar el límite de *pared de dominio delgada* obtenido matemáticamente de manera rigurosa en el sentido de las distribuciones [11], y mostrar un confinamiento de la gravedad sobre la pared, se tendría un escenario de Randall y Sundrum originado de una manera más natural que plantearlo con una pared infinitamente delgada desde el principio.

En este trabajo se muestra un método para obtener nuevas soluciones al acoplamiento Einstein-campo escalar partiendo de soluciones conocidas y analizamos aquellas soluciones que son del tipo pared de dominio gruesa, las cuales serian candidatas a escenarios del tipo Randall-Sundrum; además, se da un vistazo a la posible relación entre las soluciones tipo pared de dominio y las soluciones covariantes de una ecuación del tipo sine-Gordon en un espacio-tiempo curvo.

A fin de mostrar el desarrollo general del tema el trabajo se ha estructurado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presentan los fundamentos teóricos que dan origen al acoplamiento Einstein-campo escalar, así como algunas de las soluciones conocidas hasta la fecha, cuyas expresiones matemáticas tienen gran semejanza con la solución de una ecuación de sine-Gordon “estática”. En el segundo capítulo se revisan dos de los más recientes trabajos [14, 15], en los cuales se muestran métodos para obtener nuevas soluciones al acoplamiento. En el capítulo tres se plantea un nuevo método para obtener otras soluciones al acoplamiento que hace uso de las propiedades matemáticas de las ecuaciones diferenciales ordinarias;

aquí se muestran *nuevas soluciones del tipo pared de dominio*. Finalmente en el capítulo cuatro se explora la relación existente entre las soluciones tipo pared de dominio y las soluciones del sistema sine-Gordon y se presenta una métrica con factor conforme dinámico.

En este trabajo se utilizan unidades naturales, es decir, aquellas donde $\hbar = c = 1$; los espacio-tiempos serán 5-dimensionales (así cuando se nombren soluciones tipo Goetz, Gass-Mukherjee, etc., en realidad se estará hablando de sus versiones 5-dimensionales); finalmente, la ecuación de Einstein será expresada en forma normalizada, esto es: $G_{ab} + g_{ab}\Lambda = kT_{ab}$, donde se ha tomado $k = 1$

Capítulo I

Sistema acoplado

Einstein-Campo escalar

Luego del breve recuento histórico de los trabajos que dieron origen al tema de las paredes de dominio y cuál es el motivo que ha determinado que su importancia haya crecido en los últimos tiempos, se establecerán a continuación los principales fundamentos teóricos del tema y se presentará el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales el cual tiene algunas soluciones que se denominan del tipo *pared de dominio*.

I.1. Paredes de dominio

Partiendo del trabajo de Zeld'ovich et al. [2] acerca de las consecuencias cosmológicas de una ruptura espontánea de una simetría discreta, Kibble [3] en una comunicación de 1976 plantea que luego del Big Bang, el universo se expande, y por lo tanto se enfría, disminuyendo su temperatura por debajo de cierta temperatura crítica T_c , y haciendo que se rompan algunas simetrías discretas lo que determina que nuestro universo adquiera un determinado valor de un parámetro

η , que se identifica con el valor esperado del vacío, sobre el conjunto posible de valores probables, en determinadas regiones del espacio: ésto dá origen a la formación de dominios en los cuales el parámetro η adquiere un valor bien definido; dichos dominios se encuentran separados por regiones en las cuales el parámetro η o valor esperado del vacío, no está bien definido; son a estas regiones las que se llaman *paredes de dominio* [28].

El tratamiento matemático de este problema, en el contexto de la Relatividad General, conduce a la resolución de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales altamente no lineal, que se denomina el *sistema acoplado Einstein-Campo escalar*; para llegar a él se deben resolver las ecuaciones de Einstein:

$$G_{ab} + g_{ab}\Lambda = T_{ab} \quad (\text{I.1})$$

donde g_{ab} es la métrica del espacio-tiempo; Λ es la llamada constante cosmológica y G_{ab} es el tensor de Einstein dado por:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (\text{I.2})$$

donde R_{ab} , es el tensor de Ricci y R es el escalar de curvatura del espacio-tiempo 5-dimensional; siendo, por tanto, T_{ab} el tensor esfuerzo-energía-impulso que actúa como fuente gravitatoria y que está dado por:

$$T_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi - g_{ab}\left(\frac{1}{2}\nabla_c\phi\nabla^c\phi + V(\phi)\right) \quad (\text{I.3})$$

donde ϕ es el campo escalar, el cual autointeractúa a través del potencial V .

Por otro lado, la ecuación de movimiento del campo, deducida a partir de un principio de acción, esta dada por:

$$\nabla_a\nabla^a\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (\text{I.4})$$

En la resolución de este sistema de ecuaciones se asume una determinada forma para el tensor métrico g_{ab} y, a partir de ciertas simetrías simplificadoras, se

reduce el problema a hallar el campo escalar y su potencial de autointeracción: $\{\phi, V(\phi)\}$; aquellas soluciones que correspondan a campos ϕ que interpolen suavemente entre mínimos degenerados que debe poseer el potencial de autointeracción $V(\phi)$ para que exista la ruptura espontánea de simetría, es lo que se llamará la *solución tipo pared de dominio*, del sistema acoplado Einstein-Campo escalar.

Antes de continuar conviene aclarar algunos conceptos que se han venido utilizando como son el de transición de fase de segundo tipo y ruptura espontánea de simetría.

I.1.1. Transiciones de fase de segundo tipo

Una transición de fase de segundo tipo es un cambio de fases entre dos estados con diferentes simetrías, pudiéndose diferenciar en cualquier instante, en cuál de las fases está el sistema [12].

Este cambio de fases es continuo en el sentido de que la configuración del sistema no experimenta un salto brusco entre las dos fases. Sin embargo, la simetría en el punto de transición cambia de modo discontinuo por lo que podemos decir en cada momento en cuál de las fases se encuentra el sistema.

Cuantitativamente se puede describir este fenómeno introduciendo un parámetro η que define el grado de orden del sistema. El mismo tendrá un valor cero en una fase desordenada y será diferente de cero, cuando exista un cierto grado de ordenamiento. Usando este parámetro η se dice, por ejemplo, que la simetría de un cristal cambia sólo en el momento en que η se anula exactamente. Si hay un aumento de temperatura y η se anula bruscamente decimos que la transición de fases es de primer tipo; pero, si el cambio de η a cero se efectúa de manera continua se dice que la transición de fases es de segundo tipo.

La teoría de transiciones de fase de segundo tipo se formuló originalmente para explicar las modificaciones entre diferentes fases cristalinas pero pronto su radio de acción se amplió y ahora se aplica a todo cambio entre fases que se

distingan entre sí por cualquier propiedad de simetría; como es el caso de la transición de un metal del estado normal al estado superconductor; o al paso del helio líquido al estado superfluido; o al paso del universo como un todo de un estado de homogeneidad e isotropía total donde todas las fuerzas y partículas son equivalentes entre sí, a un estado donde existen diversas fuerzas caracterizadas por una determinada intensidad y, a su vez, partículas diferenciadas entre sí por su forma de interactuar mediante estas distintas fuerzas, bien sea en todo el universo o sólo en algunas regiones del mismo separadas por regiones que se denominan paredes de dominio.

I.1.2. Defectos topológicos y ruptura espontánea de simetrías

Sea H el hamiltoniano de un sistema y asumamos que H es invariante bajo un cierto grupo de simetrías; sin embargo, el estado base del sistema no necesariamente preserva la simetría de H , pues si el sistema posee más de un estado base disponible entonces al ubicarse en uno cualquiera de ellos se rompe la simetría del hamiltoniano. Cuando este es el caso se dice que el sistema sufre una *ruptura espontánea de simetría* [29].

Cuando un sistema sufre una transición de fase, la simetría del sistema se reduce; entendiéndose por ésto que el sistema tiende a estar con mayor probabilidad en uno de los posibles estados base que pueda poseer. Dicha reducción en la simetría la podemos expresar a través del parámetro de orden η . Así un sistema uniforme nos muestra que η toma sus valores sobre un espacio S que llamaremos *el espacio del parámetro de orden*, ahora bien, cuando el sistema está en un estado inhomogéneo los valores del parámetro η dependen de la posición y tendremos entonces puntos, líneas o superficies en el medio en las cuales el parámetro de orden no está unívocamente definido. Estos son los llamados *defectos topológicos*; tenemos así, de acuerdo a su dimensión, *defectos puntuales (monopolos)*, *defectos*

de línea (vórtices o cuerdas) y defectos de superficie (paredes de dominio). Estos defectos se clasifican mediante los grupos de homotopías $\pi_k(M)$ de la variedad M de los vacíos degenerados que el sistema deba tener [3]. Las *paredes de dominio* se pueden formar si $\pi_0(M)$ es no trivial, es decir, si M es no conexa. La formación de las *cuerdas* requiere que $\pi_1(M)$ sea no trivial, es decir, que M este formado por componentes simplemente conexos y, finalmente, los *monopolos* se podrán formar si $\pi_2(M)$ es no trivial.

I.2. Solución tipo pared de dominio

Se desea resolver las ecuaciones de Einstein acopladas con el campo escalar ϕ , esto es las ecs. (I.1), (I.3) y (I.4), para lo cual se supondrá que el espacio-tiempo es de 5 dimensiones.

La métrica más general que se va a considerar es de la forma [13]:

$$g_{ab} = f^2(\xi) \{ -dt_a dt_b + d\xi_a \xi_b + B^2(\xi, t) dx_a^i dx_b^i \} \quad (\text{I.5})$$

donde los índices $a, b = 0 \dots 4$ toman valores sobre todas las variables del espacio-tiempo, mientras que el índice $i = 1, 2, 3$ toma valores sobre las variables espaciales de la 3-brana, es decir, sobre las hipersuperficies $\xi = cte$.

En la referencia [17] se muestra que al exigir la invariancia de la métrica bajo boosts de Lorentz la función $B(\xi, t)$, asumiendo $\phi = \phi(\xi)$, toma la forma:

$$B(\xi, t) = f(\xi)C(t) \quad (\text{I.6})$$

donde la función $C(t)$ cumple lo siguiente:

$$\frac{\ddot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\dot{C}(t)^2}{C(t)^2} + \frac{\kappa}{C(t)^2} = \beta^2 \quad (\text{I.7})$$

siendo κ un parámetro que mide la curvatura intrínseca del espacio-tiempo y β^2 una constante que toma valores en los reales.

Ahora bien, ya que la curvatura intrínseca κ puede ser tanto positiva como negativa o nula, podemos tomar todas las combinaciones posibles para ella y β^2 (ver cuadro I.1), y resolver la ec. (I.7):

	$\beta^2 > 0$	$\beta^2 = 0$	$\beta^2 < 0$
$\kappa > 0$	$\cosh(\beta t)$	N.A.	N.A.
$\kappa = 0$	$e^{\pm\beta t}$	1	N.A.
$\kappa < 0$	$\sinh(\beta t)$	$\sqrt{-\kappa}t$	$\text{sen}(\beta t)$

Cuadro I.1: La función $C(t)$ en la métrica dinámica

Desarrollando las ecuaciones de Einstein para el acoplamiento con el campo escalar en el caso de curvatura intrínseca nula; es decir, para una métrica donde la función $C(t) = e^{\beta t}$ y $\kappa = 0$:

$$g_{ab} = f^2(\xi) \left\{ -dt_a dt_b + d\xi_a \xi_b + e^{2\beta t} \delta_{ij} dx_a^i dx_b^j \right\} \quad (\text{I.8})$$

obtenemos entonces las componentes del tensor de Einstein:

$$G_{tt} = 3 \left(\beta^2 - \frac{f''}{f} \right) - f^2 \Lambda \quad (\text{I.9})$$

$$G_{\xi\xi} = 6 \left(\frac{f'^2}{f^2} - \beta^2 \right) + f^2 \Lambda \quad (\text{I.10})$$

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = 3e^{2\beta t} \left(\frac{f''}{f} - \beta^2 \right) + f^2 e^{2\beta t} \Lambda \quad (\text{I.11})$$

y las componentes del tensor de energía-impulso son:

$$T_{tt} = \frac{\phi'^2}{2} + f^2 V \quad (\text{I.12})$$

$$T_{\xi\xi} = \frac{\phi'^2}{2} - f^2 V \quad (\text{I.13})$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -e^{2\beta t} \left(\frac{\phi'^2}{2} + f^2 V \right) \quad (\text{I.14})$$

Tomemos la suma $T_{tt} + T_{\xi\xi}$:

$$\begin{aligned} T_{tt} + T_{\xi\xi} &= \phi'^2 = G_{tt} + G_{\xi\xi} \\ &= -3\beta^2 + 6\frac{f'^2}{f^2} - 3\frac{f''}{f} \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Y tomemos la diferencia $T_{tt} - T_{\xi\xi}$:

$$\begin{aligned} T_{tt} - T_{\xi\xi} &= 2f^2V = G_{tt} - G_{\xi\xi} \\ &= 9\beta^2 - 3\frac{f''}{f} - 6\frac{f'^2}{f^2} - 2f^2\Lambda \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Ahora se toman las ecuaciones (I.15) y (I.16) y se expresan como:

$$\phi'^2 = 3 \left[-\frac{f''}{f} + 2\frac{f'^2}{f^2} - \beta^2 \right] \quad (\text{I.17})$$

$$V(\phi) = -\frac{3}{2f^2} \left[\frac{f''}{f} + 2\frac{f'^2}{f^2} - 3\beta^2 \right] - \Lambda \quad (\text{I.18})$$

Con la definición de una nueva función $u(\xi)$

$$u(\xi) \equiv \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \quad (\text{I.19})$$

el sistema de ecuaciones acopladas Einstein-campo escalar se reduce al siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas:

$$\phi'^2(\xi) = 3 [u^2(\xi) - u'(\xi) - \beta^2] \quad (\text{I.20})$$

$$V(\xi) = -\frac{3}{2f^2} [3u^2(\xi) + u'(\xi) - 3\beta^2] - \Lambda \quad (\text{I.21})$$

este es el sistema que se ha llamado $\{\phi(\xi), V(\phi)\}$.

Por otro lado se tiene que la *densidad de energía* ρ , y la *densidad de presión* p , del sistema quedan como:

$$T_t{}^t = -\rho = -\frac{3}{f^2} [u^2(\xi) + u'(\xi) - \beta^2] \quad (\text{I.22})$$

y

$$T_{\xi}^{\xi} = p = -\frac{6}{f^2} [u^2(\xi) - \beta^2] \quad (\text{I.23})$$

respectivamente.

Ahora se verán algunas de soluciones al acoplamiento reportadas hasta la fecha como del tipo *pared de dominio*:

I.2.1. La solución de Goetz

En la referencia [8], se reporta la primera solución exacta del tipo *pared de dominio gruesa* al acoplamiento Einstein-campo escalar, para una métrica conocida como *la métrica dinámica con simetría de reflexión* dada por:

$$g_{ab} = \cosh^{-2\delta}(\beta\xi/\delta)[-dt_a dt_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_b^i] + \cosh^{-2\delta}(\beta\xi/\delta) d\xi_a d\xi_b \quad (\text{I.24})$$

en donde $C(t) = e^{\beta t}$ con $\beta^2 > 0$ y se ha supuesto $f(\xi) = \cosh^{-\delta}(\beta\xi/\delta)$, siendo δ un parámetro real con valores dentro del intervalo $(0, 1)$, y que se relaciona directamente con el espesor de la pared.

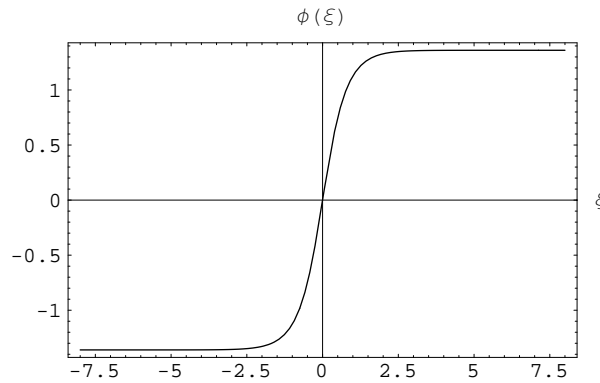


Figura I.1: Perfil de campo tipo “kink” en la solución de Goetz

El campo en esta solución tiene el perfil que se muestra en la figura (I.1) que

en la literatura se conoce como el “kink” y está dado por:

$$\phi(\xi) = \phi_0 \tan^{-1}[\sinh(\beta\xi/\delta)], \quad \phi_0 \equiv \sqrt{3\delta(1-\delta)}$$

Cuando se hace $\xi \rightarrow \pm\infty$ entonces $\phi \rightarrow \pm\pi\phi_0/2$ que son justamente los mínimos del potencial de autointeracción como se muestra en la gráfica (I.2), lo que es la característica distintiva de una pared de dominio. Además se tiene en esta solución que el espacio-tiempo resultante tiene constante cosmológica nula: $\Lambda = 0$

$$V(\phi) = 3\beta^2 \frac{3\delta + 1}{2\delta} [\cos(\phi/\phi_0)]^{2(1-\delta)} \quad (\text{I.25})$$

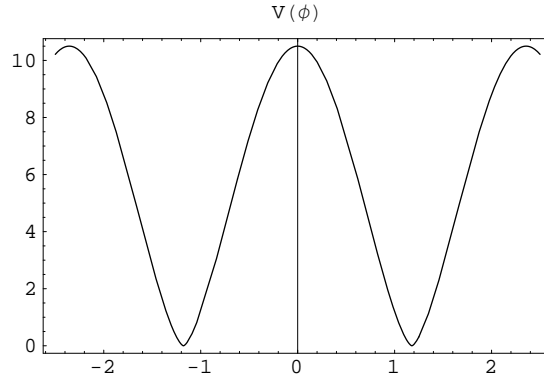


Figura I.2: Potencial de autointeracción de Goetz, $\delta = 1/4$, $\beta = 1$

I.2.2. La solución de Gass y Mukherjee

Gass y Mukherjee [9], determinan que si se relaja la condición de simetría de reflexión, a cambio de hacer estática la métrica, se puede obtener otra solución al acoplamiento donde la métrica será:

$$g_{ab} = \cosh^{-2\delta/3}(\beta\xi/\delta) e^{-4\beta\xi/3} [-dt_a dt_b + e^{2\beta\xi} dx_a^i dx_b^i] + \cosh^{-2\delta}(\beta\xi/\delta) d\xi_a d\xi_b \quad (\text{I.26})$$

que es una *métrica estática sin simetría de reflexión* en la cual $\beta^2 > 0$, y donde δ es un parámetro real con valores pertenecientes al intervalo $(0, 1)$. En este caso el campo y el potencial están dados por:

$$\begin{aligned}\phi(\xi) &= \tan^{-1}[\sinh(\beta\xi/\delta)] \\ V(\phi) &= [\cos(\phi/\phi_0)]^{2(1-\delta)}\end{aligned}\tag{I.27}$$

En este caso, como en el de Goetz, cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$ entonces $\phi \rightarrow \pm\pi\phi_0/2$, con $\phi_0 \equiv 1$, y estos son los mínimos del potencial de autointeracción, como se esperaba para una pared de dominio (ver fig. (I.3)). También se observa de la gráfica que este espacio-tiempo también tiene constante cosmológica nula, $\Lambda = 0$.

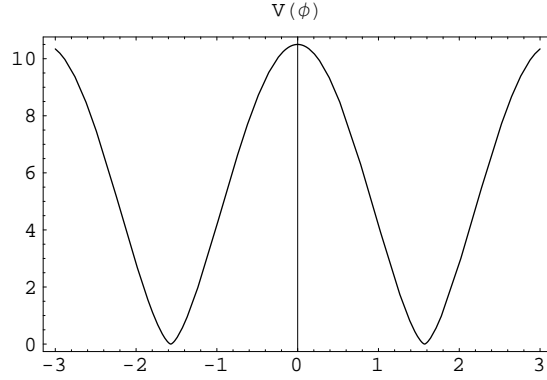


Figura I.3: Potencial de autointeracción de Gass-Mukherjee, $\delta = 1/4$

Gass y Mukherjee muestran que este espacio-tiempo para $\xi \rightarrow \infty$ se convierte en un espacio Minkowskiano (su equivalente 5-dimensional):

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\xi^2, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)\tag{I.28}$$

Por otro lado, para $\xi \rightarrow -\infty$ el espacio-tiempo tiende a ser del tipo Taub [13]:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} [-dt^2 + d\xi^2] + \xi \delta_{ij} dx_i dx_j\tag{I.29}$$

donde $i, j = 1, 2, 3$

Así, en la solución de Gass-Mukherjee la pared de dominio separa dos espaciotiempos distintos, uno Minkowskiano y otro del tipo Taub.

I.2.3. La solución de Guerrero, Melfo y Pantoja

En el 2002, Guerrero et al. [14], reportan otra solución al acoplamiento del tipo *wall of domain*, con una métrica dada por:

$$g_{ab} = (1 + \alpha^2 \xi^2)^{-1} [-dt_a dt_b + \delta_{ij} dx_a^i dx_b^j] + (1 + \alpha^2 \xi^2)^{-1} d\xi_a d\xi_b \quad (\text{I.30})$$

que es una *métrica estática con simetría de reflexión* donde $C(t) = 1$ y $\beta = 0$. El campo (fig. III.4) y el potencial de autointeracción (fig. I.5) en este caso son:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \phi_0 \tan^{-1}(\alpha\xi), & \phi_0 &= \sqrt{3} \\ V(\phi) &= \frac{15}{2} \alpha^2 \cos^2(\phi/\phi_0) \\ \Lambda &= -6\alpha^2 \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

donde el espacio-tiempo que resulta, a diferencia de los casos anteriores, presenta constante cosmológica Λ no nula, y en este caso es negativa para $\alpha > 0$ y real; a este tipo de espacio-tiempo se le denomina Anti de Sitter (AdS).

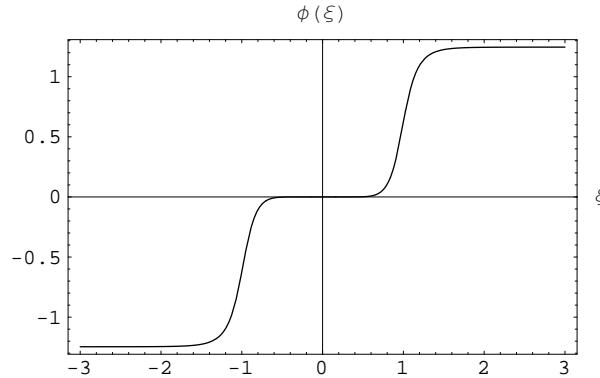


Figura I.4: Perfil del campo para la “pared doble”

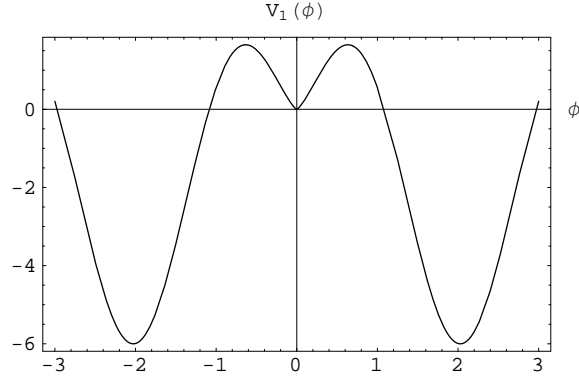


Figura I.5: Potencial de autointeracción para la “pared doble”

Estas soluciones tienen como característica común que el factor métrico, es decir, la función $f(\xi)$, es una función suave o regular; esto es, que tanto la función como sus derivadas (por lo menos hasta el segundo orden) son continuas y derivables. Por tal razón se les denominará *paredes de dominio regulares*.

I.3. La solución de la ecuación de sine-Gordon

Las tres soluciones que se mostraron en el aparte anterior tienen la característica común de que se pueden re-exresar de una manera tal que el campo, en estos casos estático, presenta una estructura matemática que tiene semejanza con la solución a una ecuación de sine-Gordon “estática”; es decir, una en donde la variable tiempo no aparece, así, por ejemplo, la solución de Goetz toma la forma¹:

$$\phi = \phi_0 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{\beta \xi}{\delta} \right) \right], \quad \phi_0 \equiv 2\sqrt{3(1-\delta)} \quad (\text{I.32})$$

$$V(\phi) = V_0 \left[\cos \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \right]^{2(1-\delta)}, \quad V_0 \equiv \frac{1+2\delta}{\delta} \beta^2 \quad (\text{I.33})$$

¹La integral $\int dx / \cosh x$ tiene además de la primitiva $\tan^{-1}(\sinh x)$, las primitivas $2 \tan^{-1}(\exp x)$ y $\tan^{-1}(\tanh(x/2))$

mientras que una de las soluciones particulares de la ecuación de sine-Gordon, conocida como solución solitónica, es:

$$\phi(\xi, t) = 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{\xi - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \quad (\text{I.34})$$

donde podemos notar las semejanzas funcionales.

En vista de que algunas de las soluciones al sistema acoplado Einstein-Campo escalar que son del tipo pared de dominio, tienen una representación funcional que se asemeja a la de una solución solitónica de la ecuación de sine-Gordon, se presume que es posible hallar soluciones covariantes de una ecuación de sine-Gordon generalizada, en un espacio-tiempo curvo del tipo pared de dominio, que permita especular acerca de la existencia de una relación entre las deformaciones del espacio-tiempo y las interacciones entre las partículas o solitones (ver apéndice).

Capítulo II

Otras soluciones al sistema acoplado

Ya que se ha presentado en el capítulo anterior el acoplamiento Einstein-campo escalar, y tres de sus soluciones analíticas conocidas hasta la fecha, a continuación se van a presentar dos de los más recientes artículos en los cuales se muestran nuevas maneras de obtener soluciones al acoplamiento; en el primero de ellos, [14] se establece un método que utiliza un re-escalamiento de soluciones de vacío (soluciones de las ecuaciones de Einstein con T_{ab} nulo), que permite obtener nuevas soluciones que incluyen las ya conocidas de Goetz y de Gass y Mukherjee. Adicionalmente se muestra allí, de una manera rigurosa, como obtener el límite de pared delgada a partir de una pared gruesa, utilizando para ello la teoría de distribuciones o funciones generalizadas (ver, por ejemplo, [11]). En el segundo artículo, [15], se parte de una métrica en 5 dimensiones, y se muestra que el acoplamiento Einstein-campo escalar tendrá dos soluciones para un mismo potencial que dependerán de la exigencia o no de simetría de reflexión para la métrica. Igualmente se propone allí otro método de re-escalamiento de soluciones de vacío (aquellas soluciones de la ecuación de Einstein donde el tensor de energía-impulso T_{ab} es nulo), para obtener nuevas soluciones y encuentran una nueva

familia de soluciones tipo pared de dominio llamadas “pared doble” .

II.1. Soluciones re-escaladas

El mecanismo de re-escalamiento [14] consiste en hallar nuevas soluciones al acoplamiento Einstein-campo escalar partiendo de soluciones de vacío conocidas; en el mismo se asume una métrica plano paralela y simétrica con dependencia temporal de la forma:

$$g_{ab} = f^2(\xi) \{ -dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b + C^2(t) dx_a^i dx_b^i \} \quad (\text{II.1})$$

con un campo escalar $\phi = \phi(\xi)$.

A partir de una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío $f_0(\xi)$ con constante cosmológica Λ_0 no nula, se obtiene una nueva familia de soluciones al acoplamiento, la cual depende de un parámetro δ :

$$f(\xi) = f_0(\xi/\delta)^\delta \quad (\text{II.2})$$

donde el campo $\phi(\xi)$ y el potencial $V(\xi)$ están dados por:

$$\phi(\xi) = \sqrt{\Lambda_0 \delta (1 - \delta)} \int_{\xi_0}^{\xi/\delta} f_0(\omega) d\omega \quad (\text{II.3})$$

$$V(\xi) = \frac{\Lambda_0}{2} \left(\frac{1 + 3\delta}{\delta} \right) f_0(\xi/\delta)^{2(1-\delta)} \quad (\text{II.4})$$

dicha familia de soluciones preserva la curvatura del espacio-tiempo y la dependencia temporal de las soluciones de vacío correspondientes.

Para ilustrar la metodología, se aplicará el mecanismo de re-escalamiento a las soluciones de vacío obtenidas por Cvetič et al. [17] que se muestran en el cuadro II.1:

	$\beta^2 > 0$	$\beta^2 = 0$	$\beta^2 < 0$
$\Lambda_0 > 0$	$[\cosh(\beta\xi)]^{-1}$	N.A.	$[\text{sen}(\beta \xi)]^{-1}$
$\Lambda_0 = 0$	$e^{\pm\beta\xi}$	1	$(\alpha\xi)^{-1}$
$\Lambda_0 < 0$	$[\sinh(\beta\xi)]^{-1}$	$(1 + \alpha\xi)^{-1}$	$[\cos(\beta \xi)]^{-1}$

Cuadro II.1: Soluciones de vacío

1. Con $f_0(\xi) = [\sinh(\beta\xi)]^{-1}$ que corresponde a una solución de vacío con constante cosmológica negativa $\Lambda_0 = -6\beta^2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= [\sinh(\beta\xi/\delta)]^{-\delta} \\
\phi(\xi) &= \phi_0 \coth^{-1}[\cosh(\beta\xi/\delta)], \quad \phi_0 \equiv -\sqrt{3\delta(\delta-1)} \\
V(\phi) &= -3\beta^2 \frac{3\delta+1}{2\delta} [\sinh(\phi/\phi_0)]^{2(1-\delta)}
\end{aligned} \tag{II.5}$$

Como en el caso del vacío, la función $C(t)$ en la métrica estará dada por cualquiera de las tres opciones dependiendo de si la curvatura del espacio-tiempo es cero, positiva o negativa respectivamente:

$$g_{ab} = [\sinh(\beta x/\delta)]^{-2\delta} \{-dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b + C^2(t) dx_a^i dx_b^i\} \tag{II.6}$$

2. Con $f_0(\xi) = [1 + \alpha\xi]^{-1}$ que esta vez corresponde a una solución de vacío con constante cosmológica negativa $\Lambda_0 = -6\alpha^2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= [1 + \alpha\xi/\delta]^{-\delta} \\
\phi(\xi) &= \phi_0 \ln[1 + \alpha\xi/\delta], \quad \phi_0 \equiv \sqrt{3\delta(\delta-1)} \\
V(\phi) &= -3\alpha^2 \frac{(3\delta+1)}{2\delta} \exp[2(\delta-1)\phi/\phi_0]
\end{aligned} \tag{II.7}$$

En este caso la solución corresponde a $C(t) = 1$ con curvatura nula y la métrica queda como:

$$g_{ab} = [1 + \alpha\xi/\delta]^{-2\delta} \{-dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b + dx_a^i dx_b^i\} \tag{II.8}$$

3. Para $f_0 = [\cos(|\beta|\xi)]^{-1}$ que es una solución de vacío con constante cos-

mológica negativa $\Lambda_0 = 6\beta^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= [\cos(|\beta|\xi/\delta)]^{-\delta} \\ \phi(\xi) &= \phi_0 \tanh^{-1}[\text{sen}(|\beta|\xi/\delta)], \quad \phi_0 \equiv \sqrt{3\delta(\delta-1)} \\ V(\phi) &= -3|\beta|^2 \frac{(3\delta+1)}{2\delta} [\cosh(\phi/\phi_0)]^{2(1-\delta)} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Para este caso el espacio-tiempo tiene curvatura negativa y $C(t) = \text{sen}(|\beta|t)$ y la métrica queda como:

$$g_{ab} = [\cos(|\beta|\xi/\delta)]^{-2\delta} \{-dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b + \text{sen}(|\beta|t) dx_a^i dx_b^i\} \quad (\text{II.10})$$

Sin embargo, ninguna de las nuevas soluciones así logradas constituye un nuevo espacio-tiempo del tipo pared de dominio porque, o bien el campo no interpola entre los mínimos del potencial (casos 1 y 3), o el potencial ni siquiera posee mínimo (caso 2).

II.2. Otra solución tipo Pared de Dominio

Considérese el sistema acoplado Einstein-Campo escalar y tómesese una métrica plana simétricamente conforme a una métrica minkowskiana y con una constante cosmológica negativa Λ :

$$g_{ab} = f^2(\xi)(-dt_a dt_b + dx_a^i dx_b^i) + f^2(\xi) d\xi_a d\xi_b \quad (\text{II.11})$$

se resuelve el sistema acoplado:

$$\phi'^2 = 3[u^2(\xi) - u'(\xi)] \quad (\text{II.12})$$

$$V(\phi) = -\frac{3}{2f^2(\xi)} [u'(\xi) + 3u^2(\xi)] - \Lambda \quad (\text{II.13})$$

donde $u = f'(\xi)/f(\xi)$.

Con los requerimientos siguientes

- i) $V(\phi)$ tiene una simetría discreta, rota espontáneamente
- ii) $\lim_{|\xi| \rightarrow 0} |\phi(\xi)'| = 0$
- iii) $\phi'(0) = 0$
- iv) $(f')^2|_{\xi=0} = 0$

Proponiendo el siguiente ansatz para el factor conforme:

$$f(\xi) = (1 + \alpha^2 \xi^2)^{-1/2} \quad (\text{II.14})$$

se encuentra la siguiente solución [14]:

$$\phi(\xi) = \phi_0 \tan^{-1}(\alpha\xi) \quad (\text{II.15})$$

$$V(\phi) = \frac{15}{2} \alpha^2 \cos^2(\phi/\phi_0) \quad (\text{II.16})$$

$$\Lambda = -6\alpha^2 \quad (\text{II.17})$$

donde $\phi_0 = \sqrt{3}$. Esta solución representa una clase de *paredes de dominio* que interpolan suavemente entre dos mínimos consecutivos del potencial $V(\phi)$, tal como se vió en el capítulo anterior.

Nótese que bajo el siguiente cambio de variables

$$\alpha y = \sinh^{-1}(\alpha\xi) \quad (\text{II.18})$$

el tensor métrico (II.11), con el factor conforme dado por (II.14), se re-escribe como:

$$g_{ab} = \cosh^{-2}(\alpha y) [-dt_a dt_b + \delta_{ij} dx_a^i dx_b^j] + dy_a dy_b \quad (\text{II.19})$$

Ahora, a pesar de que ésta no es una solución de vacío, se aplica el re-escalamiento a esta métrica y se obtiene

$$g_{ab} = \cosh^{-2\delta/\delta}(\alpha y) [-dt_a dt_b + \delta_{ij} dx_a^i dx_b^j] + dy_a dy_b \quad (\text{II.20})$$

Con esta métrica el campo $\phi(y)$, el potencial $V(\phi)$ y la constante cosmológica Λ son:

$$\phi(y) = \phi_0 \tan^{-1} [\sinh(\alpha y/\delta)] \quad (\text{II.21})$$

$$V(\phi) = 3\alpha^2 \left(2 + \frac{1}{\delta} \right) \cos^2(\phi/\phi_0) \quad (\text{II.22})$$

$$\Lambda = -6\alpha^2 \quad (\text{II.23})$$

con $\phi_0 = \sqrt{3\delta}$. Y se tiene una nueva familia de soluciones tipo pared de dominio.

Vale destacar que en la ref. [18] se muestra un procedimiento para localizar la gravedad sobre una pared de dominio gruesa similar a la mostrada aquí utilizando un formalismo de primer orden que se reportó por primera vez en la referencia [21] en el contexto de las paredes de dominio en ambientes de supergravedad y que fue generalizado en [22, 23] para incluir paredes de dominio sin supersimetría en varias dimensiones.

II.3. Soluciones con y sin simetría de reflexión

Las soluciones de pared de dominio gruesa no están unívocamente determinadas por el potencial de campo escalar y las condiciones de frontera sobre el campo en el infinito, sino que dependen también de condiciones subsidiarias impuestas sobre la métrica del espacio-tiempo [15].

El sistema acoplado Einstein-Campo escalar, con un potencial y un escalar dados, admite en general dos clases de soluciones que dependerán de si uno exige o no que exista simetría de reflexión sobre la pared plana. Así, eligiendo una carta de coordenadas apropiada, el campo escalar lucirá idéntico para ambas soluciones pero los espacio-tiempos serán intrínsecamente diferentes y no podrán ser relacionados a través de un cambio de coordenadas global.

Estos resultados se pueden generalizar a D dimensiones a partir de un espacio-tiempo de 5 dimensiones [15]; así que asumiendo una métrica con simetría plano paralela en su forma más general [13]:

$$g_{ab} = e^{2\mu(\xi)} [-dt_a dt_b + C(\xi, t)^2 dx_a^i dx_b^i] + e^{2\nu(\xi)} d\xi_a d\xi_b \quad (\text{II.24})$$

donde los índices i, j corren sobre las variables espaciales de la brana, y resolviendo el sistema de ecuaciones acopladas Einstein-Campo escalar con los requerimientos:

- i) $\phi = \phi(\xi)$
- ii) $V(\phi)$ tiene una simetría discreta, rota espontáneamente
- iii) $\phi(\xi)$ toma diferentes valores en mínimos distintos de $V(\phi)$ para $|\xi| \rightarrow \infty$
- iv) $\phi(\xi)^2$ es simétrico bajo reflexiones en el plano $\xi = 0$

se determina que la función $C(\xi, t)$ es la suma de una función para t más una función para ξ ; lo que lleva, para $\nu(\xi)$ arbitraria, a dos tipos de soluciones:

II.3.1. A. Soluciones estáticas con $C = C(\xi) \equiv e^{g(\xi)}$

La métrica estática más general se puede escribir en términos de sólo dos funciones, donde expresando convenientemente la función μ como:

$$\mu = \frac{1}{4}\nu - \frac{3}{4}g \quad (\text{II.25})$$

y si se propone $g(\xi) = \beta\xi$, las ecuaciones diferenciales para el campo y el potencial toman la forma:

$$\phi_{\mathbf{A}}'^2 = \frac{3}{4} [\nu'^2 - \nu'' - \beta^2] \quad (\text{II.26})$$

$$V(\phi)_{\mathbf{A}} = -\frac{3}{8} e^{-2\nu} \nu'' - \Lambda \quad (\text{II.27})$$

que tienen soluciones estáticas como se pedía y simetría de reflexión si la función $\nu(\xi)$ la posee. La métrica correspondiente es:

$$(g_{\mathbf{A}})_{ab} = e^{\nu(\xi)/2 - 3\beta\xi/2} [-dt_a dt_b + e^{2\beta\xi} dx_a^i dx_b^i] + e^{2\nu(\xi)} d\xi_a d\xi_b \quad (\text{II.28})$$

Esta métrica es *asimétrica* y *estática* y un ejemplo conocido es la solución de Gass y Mukherjee [9] (ver ec. (I.26))

II.3.2. B. Soluciones dinámicas con $C = C(t) \equiv e^{h(t)}$

En este caso se propone $h(t) = \beta t$, con

$$\mu = \nu \quad (\text{II.29})$$

Las ecuaciones diferenciales que se obtienen para el campo y el potencial son:

$$\phi_{\mathbf{B}}'^2 = 3 \left[\nu'^2 - \nu'' - \beta^2 \right] \quad (\text{II.30})$$

$$V(\phi)_{\mathbf{B}} = -\frac{3}{2} e^{-2\nu} \left[\nu'' + 3\nu'^2 \right] - \Lambda \quad (\text{II.31})$$

Se tiene entonces que el gradiente del campo y el potencial son estáticos en el plano $\xi = 0$ y que son simétricos bajo reflexión si la función $\nu(\xi)$ lo es; la métrica en este caso es entonces *simétrica* y *dinámica*:

$$(g_{\mathbf{B}})_{ab} = e^{2\nu(\xi)} \left[-dt_a dt_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_b^i \right] + e^{2\nu(\xi)} d\xi_a d\xi_b \quad (\text{II.32})$$

un ejemplo de esta métrica es la solución de Goetz, (ver la ec.(I.24)) [8].

Para poder construir la métrica por completo se necesita determinar el “warp factor” $e^{\nu(\xi)}$ de manera tal que $\{\phi(\xi), V(\xi)\}$ se pueda integrar.

Notando que la ecuación para ϕ tiene la misma estructura en los dos casos y haciendo uso del mecanismo de re-escalamiento de la ref. [14], se demuestra que si $\nu_0(\xi)$ es una solución de vacío con constante cosmológica no nula Λ_0 , se puede integrar el sistema de ecuaciones diferenciales con la función

$$\nu(\xi) = \delta \nu_0(\xi/\delta) \quad (\text{II.33})$$

En [15] se muestra que esta relación se cumple para espacio-tiempos de dimensión mayor tanto del tipo **A** como del **B**, con

$$\phi = \sqrt{\frac{2\Lambda_0}{a}} \sqrt{\delta(1-\delta)} \int_{\xi_0}^{\xi/\delta} e^{\nu_0(\omega)} d\omega \quad (\text{II.34})$$

$$V(\phi) = \frac{[1 + \delta(a-1)]\Lambda_0}{a} \frac{1}{\delta} \exp[2\nu_0(\xi/\delta)(1-\delta)]; \quad \Lambda = 0 \quad (\text{II.35})$$

donde $a = 1$ para el caso **A** y $a = 4$ para el caso **B**.

Esto muestra que el campo escalar y el potencial de ambos casos difieren sólo por una constante y, por lo tanto, dada una teoría con un potencial escalar, es posible obtener dos soluciones a las ecuaciones de acoplamiento Einstein-campo escalar que representen diferentes espacio-tiempos con, esencialmente, la misma configuración de campo escalar.

Al analizar el comportamiento asintótico de estos espacio-tiempos se observa que las soluciones asimétricas son asintóticamente planas a un lado de la pared y se convierten en espacios-tiempos de Taub en el otro lado, siendo este resultado válido para paredes D-2 dimensionales en D dimensiones [15].

II.4. Otra familia de soluciones tipo pared de dominio

El método de re-escalamiento de la ref. [14] no es único y en [15] se propone allí una otra manera de generar soluciones al acoplamiento a partir de las soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein. Su método consiste en considerar la función ν en la métrica (II.24) como

$$\nu(\xi) = -\frac{1}{2s} \ln [\exp(-2s\nu_1) + \exp(-2s\nu_2)] \quad (\text{II.36})$$

donde el parámetro s es un número que debe ser impar para que el campo escalar interpole entre dos mínimos consecutivos del potencial, siendo ν_1 y ν_2 soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío. Entonces el campo y el potencial vienen dados por:

$$\phi(\xi) = \sqrt{\frac{(D-2)a_D}{D-1}} \frac{\sqrt{2s-1}}{2s} \tan^{-1} [\sinh(s\Delta\nu)] \quad (\text{II.37})$$

$$V(\xi) = \frac{a_D}{2} \frac{D-2}{D-1} e^{2\nu} \left\{ \frac{[(2s-1)(\Delta\nu)^2 - a_D(\nu_1' e^{-s\Delta\nu} + \nu_2' e^{s\Delta\nu})^2]}{4 \cosh^2(s\Delta\nu)} + a_D \beta^2 \right\} \quad (\text{II.38})$$

donde $\Delta\nu \equiv \nu_2 - \nu_1$.

En particular, partiendo de un par de soluciones de vacío estáticas, es decir, con $\beta = 0$, $\nu_1(\xi) = 0$ y $\nu_2(\xi) = \ln(\alpha\xi)^{-1}$ se tiene

$$\nu = -\frac{1}{2s} \ln(1 + (\alpha\xi)^{2s}) \quad (\text{II.39})$$

y las expresiones (II.37) y (II.38) se reducen a

$$\phi = \phi_0 \tan^{-1}(\alpha^s \xi^s), \quad \phi_0 = \frac{\sqrt{3(2s-1)}}{s} \quad (\text{II.40})$$

$$V(\phi) = 3\alpha^2 \operatorname{sen}((\phi/\phi_0)^{2-2/s}) \left[\frac{2s+3}{2} \cos^2(\phi/\phi_0) - 2 \right] \quad (\text{II.41})$$

donde tenemos una constante cosmológica negativa $\Lambda = -6\alpha^2$; es decir, el espacio-tiempo será AdS. Esta familia de soluciones resulta ser una familia de *soluciones*

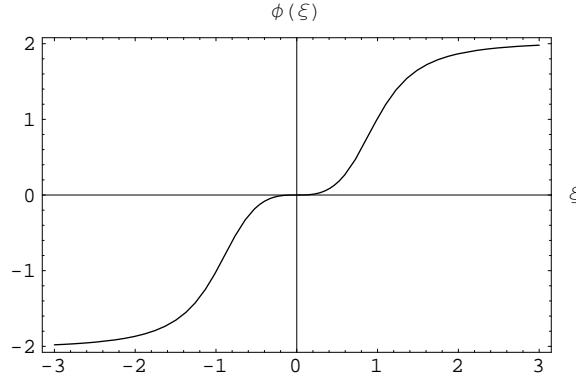


Figura II.1: Perfil del campo para la “pared doble”, $\alpha = 1$ y $s = 3$

tipo pared de dominio cuando el parámetro s toma valores enteros impares, ya que alrededor del origen el campo toma valores en un mínimo local que posee

el potencial y cae a diferentes valores de mínimos globales del potencial cuando $x \rightarrow \pm\infty$. A estas soluciones las llaman soluciones de “pared doble” (ver figuras (II.1) y (II.2)). Esta familia de soluciones constituye una generalización de la solución hallada en la ref. [14], con $s = 1$. Estas soluciones en el límite de pared

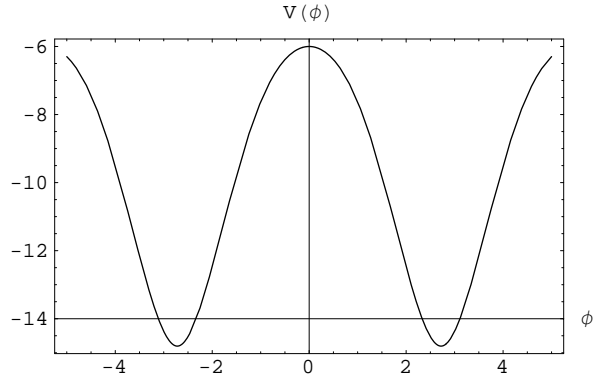


Figura II.2: Potencial para la “pared doble”, $\alpha = 1$ y $s = 3$

delgada tienen una densidad de energía y presión que corresponden a una única pared infinitamente delgada.

En las referencias [19, 20, 24] se muestran modelos de paredes dobles que también localizan la gravedad.

Capítulo III

Nuevas soluciones al sistema acoplado

Ya se ha visto en el capítulo anterior algunos de los trabajos donde se obtienen nuevas soluciones al acoplamiento Einstein-campo escalar; en todos ellos se utiliza un método de re-escalamiento que toma soluciones de vacío y, a partir de ellas, se construyen nuevas soluciones al acoplamiento. Este trabajo, sin embargo, se va a enfocar en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias al que se ha reducido el acoplamiento original: $\{\phi(\xi), V(\phi)\}$ y, específicamente, sobre la ecuación diferencial que dá el campo escalar (ver ec. (I.20)). Es ésta una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de segundo grado, del tipo Ricatti [26], la cual debe tener *dos soluciones distintas*.

La manera de resolver este tipo de ecuación diferencial consiste en determinar una solución particular y luego con ésta, construir la segunda solución. Ahora bien, ya que con los métodos de re-escalamiento se ha hallado una solución particular, se puede entonces, construir la segunda solución. Con estas nuevas soluciones comienza entonces la otra parte del trabajo que es la de determinar si alguna de ellas cumple con los requisitos necesarios para ser considerada una *solución del tipo pared de dominio*.

III.1. Un nuevo método para obtener soluciones

En el sistema acoplado $\{\phi(\xi), V(\phi)\}$ al cual se ha reducido el sistema acoplado Einstein-Campo escalar, la ecuación que dá el campo

$$\phi'^2 = 3 \left[-\frac{f''}{f} + 2\frac{f'^2}{f^2} - \beta^2 \right] \quad (\text{III.1})$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Es bien sabido que la completa integrabilidad de la misma exige que se tengan dos soluciones, las que son linealmente independientes [26]. Ahora bien, hasta ahora estos sistemas han sido resueltos parcialmente, pues sólo se ha obtenido una solución (Goetz, Gass-Mukherjee, Guerrero et al.); por lo tanto, para tener el sistema completamente integrado se necesita la otra solución. Ya que se tiene una de las soluciones se aprovechara esta ventaja para utilizar alguno de los diversos métodos que parten de situaciones similares.

Cuando se hace el cambio de variables

$$u(\xi) \equiv \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \quad (\text{III.2})$$

la ecuación del campo se transforma en:

$$\phi'^2 = 3 [-u' + u^2 - \beta^2] \quad (\text{III.3})$$

la cual se puede reescribir como:

$$u' - u^2 + \left[\beta^2 - \frac{1}{3}\phi'^2 \right] = 0 \quad (\text{III.4})$$

y esta es una ecuación del tipo Riccati; ésta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de segundo grado, la cual tiene dos soluciones. No existe una forma general de resolver esta ecuación diferencial; sin embargo, si se conoce una solución particular se puede, a partir de ésta, hallar la otra solución que es, precisamente, la situación que se tiene aquí.

Al linealizar esta ecuación haciendo el siguiente cambio de variables:

$$u \equiv -\frac{g'}{g} \Rightarrow \frac{f'}{f} = -\frac{g'}{g} \Rightarrow f = \frac{1}{g}$$

se tiene ahora que

$$g = \frac{1}{f} \quad (\text{III.5})$$

y la ecuación (III.4) se transforma en:

$$g''(\xi) - \left[\frac{1}{3}\phi'^2 + \beta^2 \right] g(\xi) = 0 \quad (\text{III.6})$$

Ahora bien, para esta ecuación, para un determinado campo ϕ , ya existe una solución g_1 , por lo que entonces se puede reducir el orden de la ecuación diferencial en una unidad y queda una nueva ecuación diferencial de primer orden [26].

La manera de hacer esto es utilizar la sustitución:

$$g = g_1 \int \bar{g} d\xi \quad (\text{III.7})$$

con lo cual la ec. (III.6) se transforma en:

$$\bar{g}' + 2\frac{g_1'}{g_1}\bar{g} = 0 \quad (\text{III.8})$$

cuya solución es:

$$\bar{g} \equiv g_2 = Cg_1 \int \frac{1}{g_1^2} d\xi \quad (\text{III.9})$$

Así que ahora se puede tratar de hallar nuevas soluciones al acoplamiento y determinar si alguna de ellas origina otro espacio-tiempo del tipo *wall de dominio*.

Antes de aplicar el método se estudiará esta nueva solución para tratar de determinar que características tendrá. Para ello escribiremos la función g_2 así:

$$g_2(\xi) = g_1(\xi)I(\xi) \quad (\text{III.10})$$

donde

$$I(\xi) \equiv \int_0^\xi (g_1(\omega))^{-2} d\omega \quad (\text{III.11})$$

o escrito de otra manera

$$f_2(\xi) = \frac{f_1(\xi)}{I(\xi)} \quad (\text{III.12})$$

De esta ecuación se observa que, dado que $f_1(\xi)$ es una función regular las posibles singularidades de $f_2(\xi)$ se deben a los ceros de la función $I(\xi)$. Ahora bien, los ceros de $I(\xi)$ se producen en el punto $\xi = 0$, que es precisamente el punto donde $f_1(\xi)$ alcanza su máximo pues se ha pedido que $f_1(\xi)^2$ sea simétrica. Así, en resumen, la función $f_2(\xi)$ tendrá una singularidad en el punto $\xi = 0$ donde $f_1(\xi)$ alcanza su valor máximo.

III.2. Aplicación del método para obtener nuevas soluciones

Para comenzar se estudiarán los resultados que se obtuvieron en la ref. [14], donde se tienen tres familias de soluciones dependientes de un parámetro δ , y que fueron generadas a partir de las soluciones de vacío de la ref. [17]. Las mismas fueron clasificadas de acuerdo al signo de la constante β^2 en la ecuación (I.20):

Caso 1 ($\beta^2 > 0$)

Estas son soluciones del acoplamiento obtenidas a partir de una solución de vacío con constante cosmológica negativa $\Lambda = -6\beta^2$ de donde se tiene:

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= [\sinh(\beta\xi/\delta)]^\delta \\ \phi(\xi) &= \phi_0 \coth^{-1}[\cosh(\beta\xi/\delta)], \quad \phi_0 \equiv -\sqrt{3\delta(\delta-1)} \\ V_1(\phi) &= -3\beta^2 \frac{(3\delta+1)}{2\delta} [\sinh(\phi/\phi_0)]^{2(1-\delta)} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Si se aplica el método visto arriba para obtener una nueva familia de soluciones se obtiene:

$$g_2(\xi) = [\sinh(\beta\xi/\delta)]^\delta I(\xi) \quad (\text{III.14})$$

donde

$$I(\xi) = \int [\sinh(\beta\xi/\delta)]^{-2\delta} d\xi \quad (\text{III.15})$$

Esta integral tiene la solución exacta que se muestra a continuación en donde se ha utilizado la llamada *función hipergeométrica*, ${}_2F_1$ [27]:

$$I(\xi) = \frac{1}{\beta} \left\{ \delta \cosh(\beta\xi/\delta) {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta; \frac{3}{2}; \cosh^2(\beta\xi/\delta) \right] \right\} \\ \times [\sinh(\beta\xi/\delta)]^{-(1+2\delta)} [-\sinh^2(\beta\xi/\delta)]^{\frac{1}{2}+\delta} \quad (\text{III.16})$$

Lamentablemente esta solución no tiene sentido físico debido a que estamos fuera de la región de convergencia de la función hipergeométrica. La convergencia de esta función está garantizada ya que $c - b - a = 1/2$ y cuando su argumento principal es menor que 1, es decir cuando $\cosh^2(\beta\xi/\delta) \leq 1$, lo cual ocurre solamente para el origen $\xi = 0$ lo que hace inútil esta solución. Soluciones particulares para determinados valores de δ pueden ser integrados directamente sin necesidad de recurrir a la función hipergeométrica, más adelante (caso 6) se mostrará una de estas soluciones que presenta comportamiento de pared de dominio.

Caso 2 ($\beta^2 = 0$)

Estas son soluciones del acoplamiento obtenidas a partir de una solución de vacío con constante cosmológica negativa $\Lambda = -6\alpha^2$ de donde tenemos:

$$g_1(\xi) = [1 + \alpha\xi/\delta]^\delta \\ \phi(\xi) = \phi_0 \ln[1 + \alpha\xi/\delta], \quad \phi_0 \equiv \sqrt{3\delta(\delta - 1)} \\ V_1(\phi) = -3\alpha^2 \frac{(3\delta + 1)}{2\delta} \exp[2(\delta - 1)\phi/\phi_0] \quad (\text{III.17})$$

Vamos a hallar una nueva familia de soluciones:

$$g_2(\xi) = g_1(\xi)I(\xi) \quad (\text{III.18})$$

donde

$$I(\xi) = \int [1 + \alpha\xi/\delta]^{-2\delta} d\xi \quad (\text{III.19})$$

Y nuestra nueva familia de soluciones es:

$$g_2(\xi) = \frac{\delta}{\alpha(1-2\delta)} [1 + \alpha\xi/\delta]^{1-\delta} \quad (\text{III.20})$$

Con esta nueva solución obtenida podemos hallar el potencial de autointeracción correspondiente:

$$V_2(\phi) = -\frac{3}{2} \frac{(\delta-1)(3\delta-4)}{(1-2\delta)^2} \exp(-\delta\phi/\phi_0) \quad (\text{III.21})$$

Caso 3 ($\beta^2 < 0$)

En este caso la solución del acoplamiento obtenida a partir de una solución de vacío con constante cosmológica negativa $\Lambda = 6\beta^2$ es:

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= [\cos(|\beta|\xi/\delta)]^\delta \\ \phi(\xi) &= \phi_0 \tanh^{-1}[\text{sen}(|\beta|\xi/\delta)], \quad \phi_0 \equiv \sqrt{3\delta(\delta-1)} \\ V_1(\phi) &= -3|\beta|^2 \frac{(3\delta+1)}{2\delta} [\cosh(\phi/\phi_0)]^{2(1-\delta)} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Al aplicar el mecanismo para obtener la nueva familia de soluciones se llega a:

$$g_2(\xi) = g_1(\xi)I(\xi) \quad (\text{III.23})$$

donde

$$I(\xi) = \int g_1^{-2}(\xi) d\xi = \int [\cos(|\beta|\xi/\delta)]^{-2\delta} d\xi \quad (\text{III.24})$$

La solución exacta a esta integral es:

$$I(\xi) = \frac{\delta}{|\beta|(2\delta-1)} {}_2F_1 \left[\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \delta; \cos^2(|\beta|\xi/\delta) \right] \quad (\text{III.25})$$

donde el potencial viene dado en términos de funciones Beta, pero que no se mostrará ya que no aporta nada nuevo.

Ninguna de estas nuevas soluciones constituye una del tipo pared de dominio ya que, como se vió en el capítulo anterior, o los campos no interpolan suavemente entre los posibles mínimos del respectivo potencial, o este último ni siquiera tiene un mínimo.

Ahora se verán los casos en los cuales la primera solución ya es una pared de dominio:

Caso 4 (Pared simple)

Este caso corresponde a una solución analítica de un espacio-tiempo del tipo *pared de dominio* con constante cosmológica negativa $\Lambda_1 = -6\alpha^2$, reportado en la referencia [14]. Según se vió en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= [1 + \alpha^2 \xi^2]^{1/2} \\ \phi(\xi) &= \phi_0 \arctan(\alpha \xi), \quad \phi_0 \equiv \sqrt{3} \\ V_1(\phi) &= \frac{15}{2} \alpha^2 \cos^2(\phi/\phi_0) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Ahora se determinará la otra solución asociada a este caso:

$$g_2(\xi) = g_1(\xi) I(\xi) \quad (\text{III.27})$$

donde

$$I(\xi) = \int [1 + \alpha^2 \xi^2]^{-1} d\xi \quad (\text{III.28})$$

con lo cual la segunda solución es:

$$g_2(\xi) = \frac{1}{\alpha} (1 + \alpha^2 \xi^2)^{1/2} \arctan(\alpha \xi) \quad (\text{III.29})$$

A la cual le corresponde el potencial de autointeracción $V_2(\phi)$ (ver fig. (III.1)):

$$\begin{aligned} V_2(\phi) = & -\frac{3}{2} \alpha^2 \cos^2(\phi/\phi_0) \{ [4 \tan^2(\phi/\phi_0) - 1] [\arctan(\tan(\phi/\phi_0))]^2 + 4 \} \\ & - 6\alpha^2 \sin(2\phi/\phi_0) \arctan(\tan(\phi/\phi_0)) \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

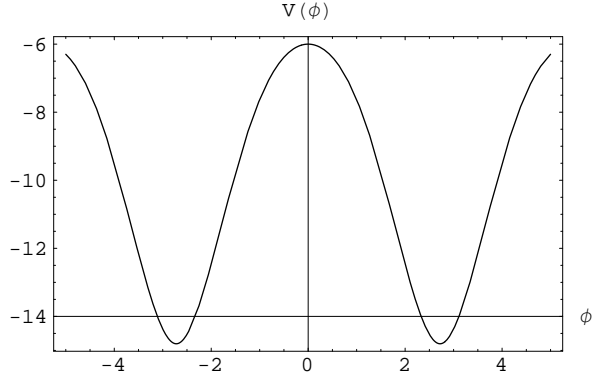


Figura III.1: Potencial para la pared simple irregular en el caso $\alpha = 1$

Al analizar esta segunda solución $g_2(\xi)$ se observa que la misma constituye una *nueva solución* del tipo *wall de dominio* pues el campo ϕ interpola entre dos mínimos consecutivos del potencial $V(\phi)$; es decir, cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$ entonces $\phi \rightarrow \pm\pi\phi_0/2$ y el sistema alcanza su estado de mínima energía caracterizado por la constante cosmológica negativa $\Lambda_2 = -\frac{3}{2}\pi^2\alpha^2$.

Se puede ver que la densidad de energía y la densidad de presión adquieren los perfiles que se esperarían para una pared de dominio; es decir, alcanzan un máximo en el origen, donde se ubica la pared, y asintóticamente tienden al valor del vacío, que en este caso es el valor de la constante cosmológica (ver figuras (III.2) y (III.3))

$$\rho(\xi) = -\frac{6 + 12\alpha\xi \arctan(\alpha\xi) + (-3 + 6(\alpha\xi)^2)[\arctan(\alpha\xi)]^2}{1 + (\alpha\xi)^2} \quad (\text{III.31})$$

$$p(\xi) = -\frac{6(1 + \alpha\xi \arctan(\alpha\xi))^2}{1 + (\alpha\xi)^2} \quad (\text{III.32})$$

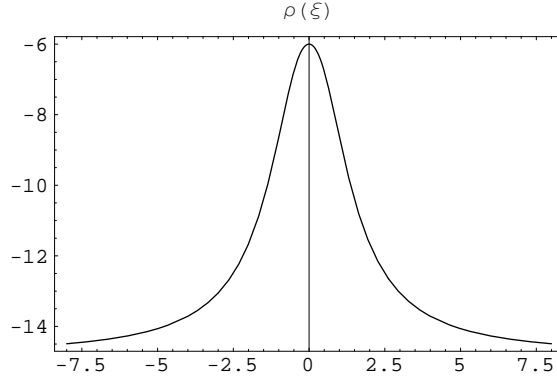


Figura III.2: Densidad de energía para la pared simple irregular en el caso $\alpha = 1$

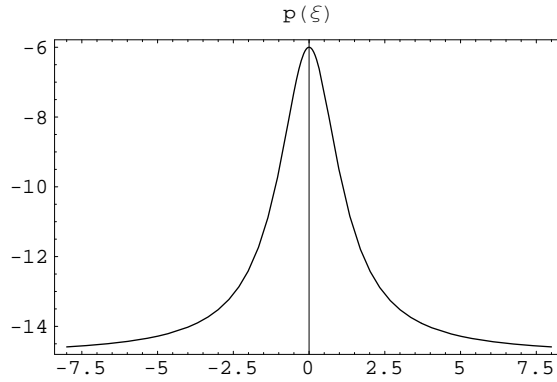


Figura III.3: Densidad de presión para la pared simple irregular en el caso $\alpha = 1$

Caso 5 (Paredes dobles)

En este caso se tiene la familia de paredes dobles hallada por Melfo et al. [15], con constante cosmológica $\Lambda_1 = -6\alpha^2$:

$$\begin{aligned}
 g_1(\xi) &= [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{1/2s}, \\
 \phi(\xi) &= \phi_0 \arctan[(\alpha\xi)^s], \quad \phi_0 \equiv \frac{\sqrt{3(2s-1)}}{s} \\
 V_1(\phi) &= 3\alpha^2 \sin(\phi/\phi_0)^{2-2/s} \left[\frac{2s+3}{2} \cos^2(\phi/\phi_0) - 2 \right] \quad (\text{III.33})
 \end{aligned}$$

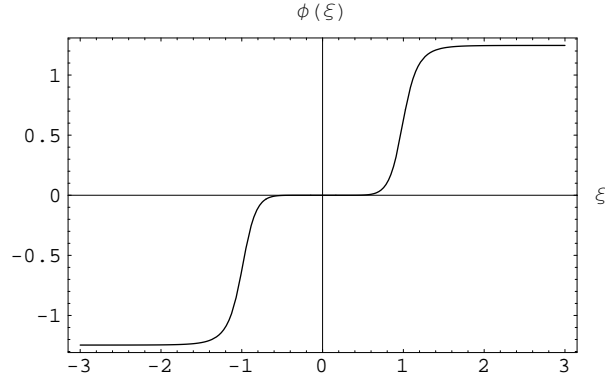


Figura III.4: Perfil del campo para la “pared doble” en el caso $s = 9$

En este caso sólo cuando el parámetro s toma valores enteros impares positivos se tiene una pared de dominio y el caso de las paredes simples estudiado anteriormente es un caso especial para $s = 1$.

El campo asociado a estas soluciones presenta el perfil de la fig. (III.4) que se muestra allí para un valor del parámetro $s = 9$

Al calcular la otra solución asociada a este caso se tiene:

$$g_2(\xi) = g_1(\xi)I(\xi) \quad (\text{III.34})$$

donde

$$I(\xi) = \int [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-1/s} d\xi \quad (\text{III.35})$$

siendo la solución entonces:

$$g_2(\xi) = \xi[1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{1/2s} {}_2F_1 \left[\frac{1}{2s}, \frac{1}{s}; 1 + \frac{1}{2s}; -(\alpha\xi)^{2s} \right] \quad (\text{III.36})$$

Así se tiene que la función métrica será:

$$f_2(\xi) = \frac{1}{\xi[1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{1/2s} {}_2F_1 \left[\frac{1}{2s}, \frac{1}{s}; 1 + \frac{1}{2s}; -(\alpha\xi)^{2s} \right]} \quad (\text{III.37})$$

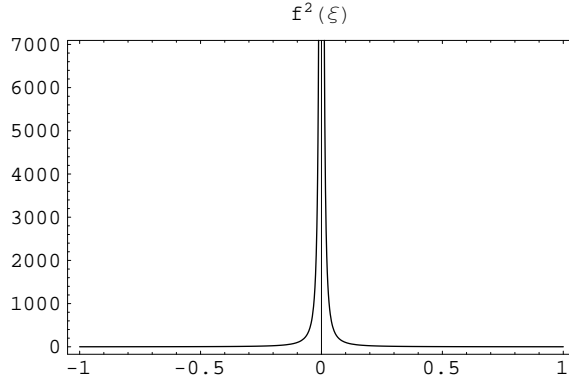


Figura III.5: Perfil de la métrica irregular para la “pared doble” en el caso $s = 9$

El perfil de la función métrica en la fig. (III.5) muestra una singularidad en el origen, por lo menos en la carta de coordenadas utilizada aquí; determinar si la misma es o no de origen físico implicaría un análisis de los invariantes de curvatura, pero tal estudio está fuera del alcance de este trabajo.

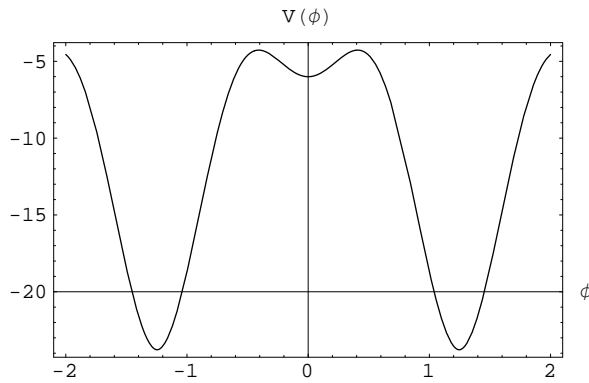


Figura III.6: Potencial para la “pared doble” irregular en el caso $s = 9$

El potencial de autointeracción $V_2(\phi)$ asociado a esta solución se muestra en la fig. (III.6); se nota allí, al igual que en el caso regular, que el campo interpola suavemente entre los mínimos globales del potencial por lo que esta nueva solución es también una pared de dominio. Y, de igual manera que en el caso regular, esto

se cumple cuando el parámetro s toma valores enteros positivos impares.

$$\begin{aligned}
V_2(\phi) = & -12\alpha^2 {}_2F_1 [a, b; c; -(\tan^2(\phi/\phi_0))] \frac{\tan^2(\phi/\phi_0)}{1 + \tan^2(\phi/\phi_0)} \\
& - 6\alpha^2 [1 + \tan^2(\phi/\phi_0)]^{-\frac{1}{s}} - \frac{3}{2}\alpha^2 \left\{ {}_2F_1 [a, b; c; -(\tan^2(\phi/\phi_0))] \right\}^2 \\
& \times \tan^2(\phi/\phi_0) [1 + \tan^2(\phi/\phi_0)]^{-2+\frac{1}{2}} [1 - 2s + 4 \tan^2(\phi/\phi_0)] \quad (\text{III.38})
\end{aligned}$$

donde $a = \frac{1}{2s}$; $b = \frac{1}{s}$ y $c = 1 + \frac{1}{2s}$

En este caso la densidad de energía está dado por la expresión matemática que se muestra a continuación y cuyo perfil se muestra en la fig. (III.7)

$$\begin{aligned}
\rho(\xi) = & -6[1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{\frac{1}{s}} - 12(\alpha\xi)^{2s} [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-1} {}_2F_1 \left[\frac{1}{2s}, \frac{1}{s}; 1 + \frac{1}{2s}; -(\alpha\xi)^{2s} \right] \\
& - 3(\alpha\xi)^{2s} [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-2+\frac{1}{s}} [1 - 2s + 2(\alpha\xi)^{2s}] \left\{ {}_2F_1 \left[\frac{1}{2s}, \frac{1}{s}; 1 + \frac{1}{2s}; -(\alpha\xi)^{2s} \right] \right\}^2 \quad (\text{III.39})
\end{aligned}$$

Nótense los dos “picos” que presenta la densidad de energía y la aparente estructura interna entre ellas

Por su parte la densidad de presión está dada por:

$$p(\xi) = -6 \frac{\left[1 + (\alpha\xi)^{2s} \left[1 + [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{\frac{1}{s}} {}_2F_1 \left[\frac{1}{2s}, \frac{1}{s}; 1 + \frac{1}{2s}; -(\alpha\xi)^{2s} \right] \right] \right]^2}{[1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{2+\frac{1}{s}}} \quad (\text{III.40})$$

En la fig. ((III.8)) se nota que la densidad de presión se hace máxima alrededor del origen, justo en la zona donde se ubicaría la fuente de materia que da origen a la pared doble.

Resumiendo se tiene entonces que se ha hallado una nueva familia de soluciones del tipo pared de dominio que en este caso presentan un factor métrico que tiene una singularidad en el origen.

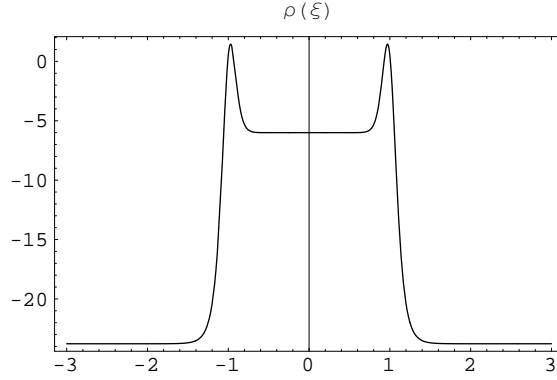


Figura III.7: Densidad de energía para la “pared doble” irregular con $s = 9$

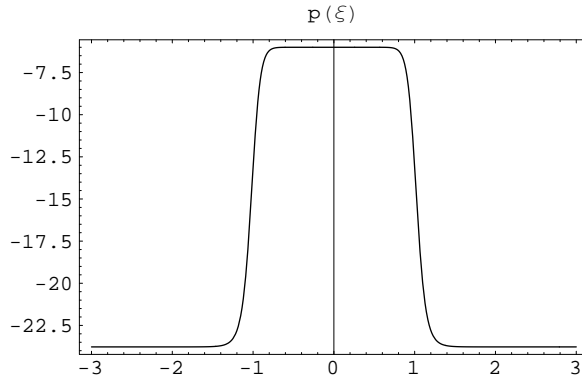


Figura III.8: Densidad de presión para la “pared doble” irregular con $s = 9$

Caso 6 (Solución de Goetz)

Este es el caso de la primera solución analítica reportada en la literatura que corresponde a un espacio-tiempo del tipo *wall de dominio*; es la llamada solución de Goetz [8], y en la cual no hay constante cosmológica:

$$\begin{aligned}
 g_1(\xi) &= [\cosh(\beta\xi/\delta)]^\delta, \quad 0 < \delta < 1 \\
 \phi(\xi) &= \phi_0 \arctan[\sinh(\beta\xi/\delta)], \quad \phi_0 \equiv \sqrt{3\delta(1-\delta)} \\
 V_1(\phi) &= 3\beta^2 \frac{(3\delta+1)}{2\delta} [\cos(\phi/\phi_0)]^{2(1-\delta)}
 \end{aligned} \tag{III.41}$$

El perfil del campo es:

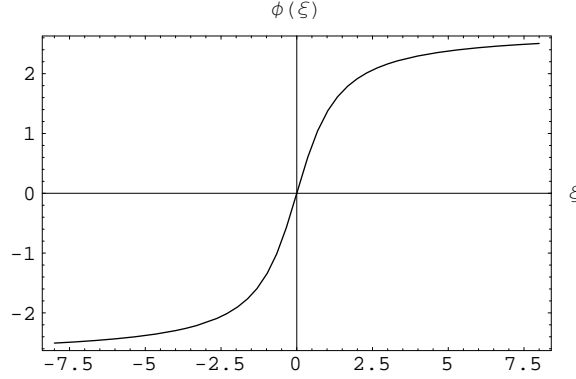


Figura III.9: Perfil del campo de la solución de Goetz

La familia de soluciones asociada está dada por:

$$g_2(\xi) = [\cosh(\beta\xi/\delta)]^\delta \int [\cosh(\beta\xi/\delta)]^{-2\delta} d\xi \quad (\text{III.42})$$

Como se comentó en el primer caso esta integral no se puede resolver en general, sin embargo debido a que la función $1/\cosh(\beta\xi/\delta)$ es real, continua y acotada garantiza la integrabilidad de la función. Par el caso $\delta = 1/2$ se tiene

$$g_2(\xi) = [\cosh(2\beta\xi)]^{1/2} \arctan(\tanh(\beta\xi)) \quad (\text{III.43})$$

a la cual corresponde un factor conforme en la métrica cuyo perfil muestra la fig. (III.10) que se asemeja mucho a una delta de Dirac

El potencial de autointeracción que muestra la fig. (III.11) indica una posible discontinuidad en la primera derivada que señalaría, a su vez, la presencia de una discontinuidad pronunciada en el tensor de energía-impulso

$$V_2(\phi) = \frac{3\beta^2 \cos^2(\phi/\phi_0)}{2} \left\{ -4 + 5 \left[\arctan(\tanh(\frac{1}{2} \arg \sinh(\tan(\phi/\phi_0)))) \right]^2 \right\} \\ - 12\beta^2 \left\{ \left[\arctan(\tanh(\frac{1}{2} \arg \sinh(\tan(\phi/\phi_0)))) \right] \sin(\phi/\phi_0) \right\} \quad (\text{III.44})$$

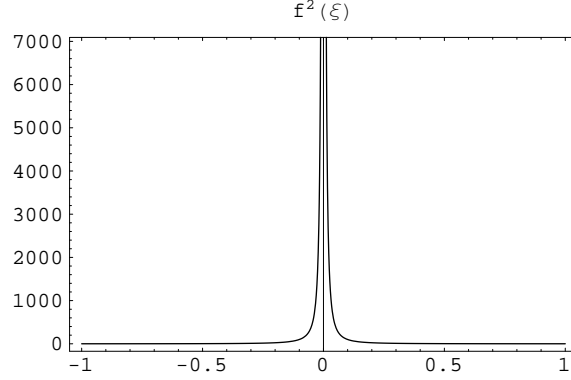


Figura III.10: Perfil de la métrica irregular para el caso $\delta = 1/2$ y $\beta = 1$

En esta solución se tiene un espacio-tiempo con constante cosmológica negativa $\Lambda_2 = -3\pi\beta^2$, a diferencia de la solución de partida en la cual la constante cosmológica era nula.

Esta nueva solución corresponde a una nueva pared de dominio pues cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, el campo $\phi \rightarrow \pm\sqrt{3}\pi/4$; es decir, interpola entre mínimos consecutivos del potencial. En este caso la densidad de energía (ver fig. (III.12)) y de presión (ver fig. (III.13)) son, prácticamente, las mismas como ocurre en el caso de las paredes de dominio infinitamente delgadas (ver [6]):

$$\rho(\xi) = -3 \frac{[2 - 3(\arctan(\tanh(\beta\xi)))^2]}{\cosh(2\beta\xi)} - 12 \tanh(2\beta\xi) [\arctan(\tanh(\beta\xi))] \quad (\text{III.45})$$

$$p(\xi) = 6 \frac{[-1 + (\arctan(\tanh(\beta\xi)))^2]}{\cosh(2\beta\xi)} - 12 \tanh(2\beta\xi) [\arctan(\tanh(\beta\xi))] \quad (\text{III.46})$$

En resumen, partiendo de una métrica dinámica con simetría de reflexión en 5 dimensiones, de la forma

$$g_{ab} = f^2(\xi) \{ -dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b + e^{2\beta t} \delta_{ij} dx_a^i dx_b^j \} \quad (\text{III.47})$$

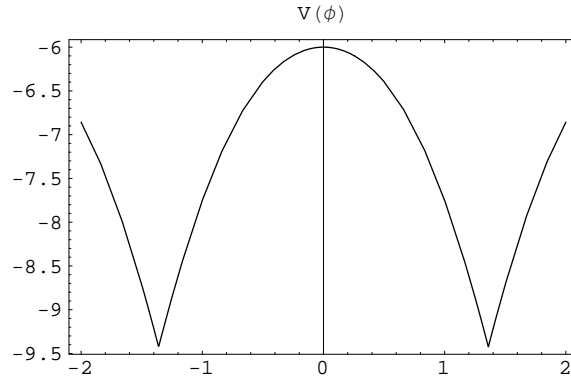


Figura III.11: Potencial de autointeracción de la solución irregular para el caso $\delta = 1/2$ y $\beta = 1$

se ha hallado un método para obtener nuevas soluciones al acoplamiento Einstein-campo escalar en el cual, para una misma configuración del campo ϕ , se tienen dos espacio-tiempos completamente distintos ya que no pueden ser relacionados a través de una transformación global de coordenadas, y esto es debido a que los potenciales de autointeracción $V(\phi)$ son totalmente diferentes. Además, se observa que esta nueva solución, obtenida a partir de una solución que es del tipo pared de dominio, pareciera ser que conduce a una nueva solución que también es del tipo pared de dominio; además la nueva solución presenta, en esta carta de coordenadas, una singularidad en el origen por lo cual se ha llamado a estas nuevas soluciones *paredes de dominio irregulares*.

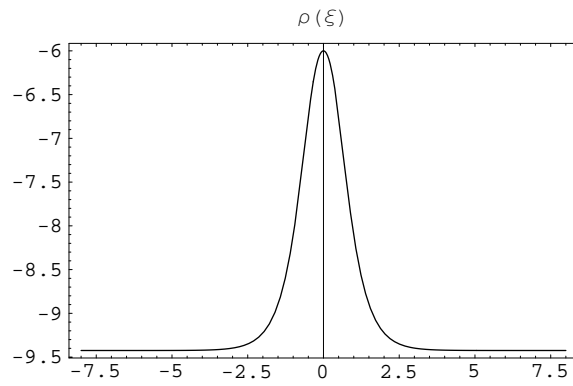


Figura III.12: Densidad de energía para la solución irregular en el caso $\delta = 1/2$ y $\beta = 1$

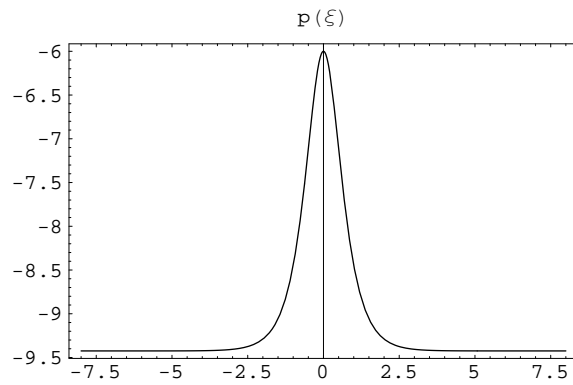


Figura III.13: Densidad de presión para la solución irregular en el caso $\delta = 1/2$ y $\beta = 1$

Capítulo IV

Campos dependientes del tiempo

Ya se ha visto al final del primer capítulo que algunas de las soluciones al acoplamiento Einstein-campo escalar que son del tipo pared de dominio, se pueden re-escribir de manera tal que luzcan en su expresión matemática, como una solución particular de la ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal conocida como la ecuación de sine-Gordon; más específicamente, una “ecuación de sine-Gordon estática”. Ahora, bien ya que el sistema de referencia que se ha escogido para observar a la pared se halla fijo a la misma se verá qué le pasa a las soluciones del acoplamiento si se efectúa una transformación de Lorentz del tipo boost al sistema de referencia. También se muestra en este capítulo una métrica del tipo

$$g_{ab} = h^2(\xi, t)(-dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b + \delta_{ij} dx_a^i dx_b^j) \quad (\text{IV.1})$$

y se observa como se modifica el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias $\{\phi(\xi), V(\phi)\}$ que se había obtenido anteriormente.

IV.1. Una solución tipo sine-Gordon

La familia de soluciones de Goetz para el valor del parámetro $\delta = 1/2$, proporciona, explícitamente, un espacio-tiempo de tipo *pared de dominio* como fondo a un potencial de autointeracción de un campo, cuya ecuación de movimiento tiene una expresión matemática semejante a la de una ecuación de sine-Gordon definida para un espacio-tiempo curvo:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= [\cosh(2\beta x)]^{1/2} \\ \phi(x) &= 2\phi_0 \tan^{-1}[\exp(2\beta x)], \quad \phi_0 \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \\ V(\phi) &= V_0[\cos(\phi/\phi_0)], \quad V_0 \equiv \frac{15}{2}\beta^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Para este caso la ecuación de movimiento está dada por:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = \frac{dV}{d\phi} \quad (\text{IV.3})$$

Ahora bien, al hacer la siguiente identificación de parámetros;

$$\begin{aligned} V_0 &\equiv 1 \\ \theta &\equiv \frac{\phi}{\phi_0} \\ x &\equiv x' - vt \\ 2\beta &\equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}$$

Se obtienen las siguientes expresiones:

$$\theta(x', t) = 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{x' - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right] \quad (\text{IV.4})$$

$$V(\theta) = \cos \theta \quad (\text{IV.5})$$

Que es justamente la solución de la ecuación de movimiento que se ha transformado en una ecuación del tipo sine-Gordon pero en un espacio-tiempo curvo:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = \text{sen } \theta \quad (\text{IV.6})$$

Este resultado se hubiera obtenido si se hubiese efectuado un boost de Lorentz de velocidad v a lo largo del plano que contiene a la pared:

$$t = \gamma(t' - v\xi) \quad (\text{IV.7})$$

$$\xi = \gamma(\xi' - vt') \quad (\text{IV.8})$$

$$x = x' \quad (\text{IV.9})$$

$$y = y' \quad (\text{IV.10})$$

$$z = z' \quad (\text{IV.11})$$

con $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$

Esto da pie a que se especule acerca de si es posible obtener a partir de campos escalares dependientes del tiempo y sometidos a potenciales de autointeracción, soluciones solitónicas al acoplamiento Einstein-campo escalar que son, a su vez, espacio-tiempos del tipo *pared de dominio*. Ahora bien, dadas las características tipo partícula de los solitones existiría una motivación para estudiar la relación que pueda haber entre estos dos sistemas pensando en una supuesta conexión entre las interacciones de las partículas y las deformaciones del espacio-tiempo. Esto, implicaría hallar la transformación de Bäcklund (ver [25], cap. 9) de la ecuación de sine-Gordon en un espacio-tiempo curvo y construir el principio de superposición no lineal para tratar de explicar las interacciones entre los solitones que representen a las partículas. Esto, sin embargo, está más allá del alcance de este trabajo.

IV.2. Una métrica dinámica

En esta sección se estudiará el caso en el cual la métrica toma la forma

$$g_{ab} = h^2(\xi, t)(-dt_a dt_b + d\xi_a d\xi_b + dx_a^i dx_b^i) \quad (\text{IV.12})$$

Esta métrica es similar al la que se utilizó anteriormente, sólo que ahora se

pide que el parámetro β sea nulo y que el factor conforme (que en este caso se ha llamado h) tenga además una dependencia temporal.

Con estas nuevas condiciones se van a resolver las ecuaciones de Einstein acopladas al campo escalar ϕ

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = T_{\mu\nu} \quad (\text{IV.13})$$

donde el campo escalar ϕ también depende del tiempo y el tensor de energía-impulso es:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\nabla_\sigma\phi\nabla^\sigma\phi + V(\phi)\right) \quad (\text{IV.14})$$

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

Las componentes del tensor de Einstein (más la constante cosmológica) quedan así:

$$G_{tt} = -3\frac{\dot{h}''}{h} + 6\frac{\dot{h}^2}{h^2} - \frac{\Lambda}{h^2} \quad (\text{IV.16})$$

$$G_{\xi\xi} = -3\frac{\ddot{h}}{h} + 6\frac{h'^2}{h^2} + \frac{\Lambda}{h^2} \quad (\text{IV.17})$$

$$G_{xx} = G_{yy} = G_{zz} = 3\frac{h''}{h} - 3\frac{\ddot{h}}{h} + \frac{\Lambda}{h^2} \quad (\text{IV.18})$$

$$G_{\xi t} = 6\frac{\dot{h}h'}{h^2} - 3\frac{\dot{h}'}{h} \quad (\text{IV.19})$$

Mientras las componentes del tensor Energía-Impulso son:

$$T_{tt} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + h^2V(\phi) \quad (\text{IV.20})$$

$$T_{\xi\xi} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} - h^2V(\phi) \quad (\text{IV.21})$$

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\phi'^2}{2} - h^2V(\phi) \quad (\text{IV.22})$$

$$T_{\xi t} = \dot{\phi}\phi' \quad (\text{IV.23})$$

Entonces el sistema de ecuaciones de Einstein queda así:

$$-3\frac{h''}{h} + 6\frac{\dot{h}^2}{h^2} - \frac{\Lambda}{h^2} = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + \phi'^2 + 2h^2V(\phi)] \quad (\text{IV.24})$$

$$-3\frac{\ddot{h}}{h} + 6\frac{h'^2}{h^2} + \frac{\Lambda}{h^2} = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + \phi'^2 - 2h^2V(\phi)] \quad (\text{IV.25})$$

$$3\frac{h''}{h} - 3\frac{\ddot{h}}{h} + \frac{\Lambda}{h^2} = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 - \phi'^2 - 2h^2V(\phi)] \quad (\text{IV.26})$$

$$6\frac{\dot{h}h'}{h^2} - 3\frac{\dot{h}'}{h} = \dot{\phi}\phi' \quad (\text{IV.27})$$

Junto a estas ecuaciones se tiene la ecuación de movimiento:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = \frac{dV}{d\phi} \quad (\text{IV.28})$$

Ahora se tratará de resolver este sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, altamente no lineal. Para ello se sumará la primera y tercera de las ecuaciones:

$$\dot{\phi} = -3\frac{\ddot{h}}{h} + 6\frac{\dot{h}^2}{h^2} \quad (\text{IV.29})$$

Ahora se restará la segunda y tercera de las ecuaciones:

$$\phi'^2 = -3\frac{h''}{h} + 6\frac{h'^2}{h^2} \quad (\text{IV.30})$$

Y ahora se restaran la primera y segunda de las ecuaciones:

$$V(\phi) + \Lambda = -\frac{3}{2h^2} \left[-\frac{h''}{h} + \frac{\ddot{h}}{h} - 2\frac{h'^2}{h^2} + 2\frac{\dot{h}^2}{h^2} \right] \quad (\text{IV.31})$$

Las tres ecuaciones (IV.29), (IV.30) y (IV.31) son el acoplamiento $\{\phi(\xi), V(\phi)\}$ a resolver en el caso de la métrica dinámica

Antes de seguir es bueno observar que estas ecuaciones se reducen al caso estático cuando se considera que el factor metrico sólo deoende de ξ , esto es $h(\xi)$, ya estudiado antes.

IV.3. Solución del tipo onda viajera

Ahora se propondrá un cambio de variables que permita resolver más fácilmente el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales:

$$h = \frac{1}{g} \quad (\text{IV.32})$$

Con este cambio de variables las ecuaciones (IV.29), (IV.30) y (IV.31) se transforman respectivamente en:

$$\dot{\phi}^2 = 3 \frac{\ddot{g}}{g} \quad (\text{IV.33})$$

$$\phi'^2 = 3 \frac{g''}{g} \quad (\text{IV.34})$$

$$\frac{V(\phi) + \Lambda}{g} = \frac{3}{2} \left[g'' - \ddot{g} - 4 \left(\frac{g'^2}{g} - \frac{\dot{g}^2}{g} \right) \right] \quad (\text{IV.35})$$

Se asumirá que las soluciones son del tipo “onda viajera”, es decir, se va a suponer que el campo $\phi(\xi)$ toma la forma $\phi(\gamma(\xi - vt))$, donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ y v es un parámetro que toma valores reales positivos.

Se definió la función $\phi(\gamma(\xi - vt)) = \phi(\varepsilon)$ y entonces las ecuaciones para el campo y el potencial se transformaron en:

$$\frac{d^2 g}{d\varepsilon^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{d\phi}{d\varepsilon} \right)^2 g = 0 \quad (\text{IV.36})$$

$$V(\varepsilon) + \Lambda = \frac{3}{2} \left[g(\varepsilon) \frac{d^2 g}{d\varepsilon^2} - 4 \left(\frac{dg}{d\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.37})$$

Se ha reducido entonces el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de dos variables, a un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de una variable, donde la ecuación que da el factor métrico

es similar a la ecuación (III.6) y, si tenemos una solución particular, se le podría aplicar el método visto en el capítulo III para obtener la otra solución.

Ahora se analizará un ejemplo que se reduce a un caso conocido.

Sea una función $g(\varepsilon)$ dada por:

$$g(\xi, t) = \sqrt{1 + \alpha^2 \gamma^2 (\xi - vt)^2} \quad (\text{IV.38})$$

entonces con el cambio de variables

$$\varepsilon = \gamma(\xi - vt) \quad (\text{IV.39})$$

se tendrá

$$g(\varepsilon) = \sqrt{1 + \alpha^2 \varepsilon^2} \quad (\text{IV.40})$$

con lo cual las ecs. (IV.36) y (IV.37) se transforman en:

$$\left(\frac{d\phi}{d\varepsilon}\right)^2 = 3\alpha^2 \frac{1}{(1 + \alpha^2 \varepsilon^2)^2} \quad (\text{IV.41})$$

$$V(\varepsilon) = \frac{3}{2}\alpha^2 \frac{1 - 4\alpha^2 \varepsilon^2}{1 + \alpha^2 \varepsilon^2} \quad (\text{IV.42})$$

Integrando la ec. (IV.41) se obtiene

$$\phi(\varepsilon) = \sqrt{3} \arctan(\alpha\varepsilon) \quad (\text{IV.43})$$

Y la ec. (IV.42) en términos de ϕ es:

$$V(\phi) = \frac{15}{2}\alpha^2 \cos^2(\phi/\phi_0) - 6\alpha^2 \quad (\text{IV.44})$$

donde $\phi_0 = \sqrt{3}$

Con la ecuación de movimiento

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = \frac{dV}{d\phi} \quad (\text{IV.45})$$

llegamos nuevamente al caso de una ecuación tipo sine-Gordon en un espacio-tiempo curvo, donde el espacio tiempo corresponde al de una pared de dominio, de acuerdo con lo discutido en los capítulos II y III de este trabajo.

Realmente no se puede asegurar que el campo (IV.43) corresponda a un soliton de la ecuación de sine-Gordon curvo (IV.45), ya que para afirmar esto, deberíamos obtener el principio de superposición no lineal asociado a la ecuación en cuestión [25] y como se comento al inicio del capítulo esto esta fuera del alcance de este trabajo.

Conclusiones

Luego de haber hecho una breve revisión acerca de los referentes teóricos concernientes a los defectos topológicos conocidos como paredes de dominio y sus principales características, y de presentar algunas de las soluciones al acoplamiento Einstein-campo escalar que, reducido al sistema $\{\phi(\xi), V(\phi)\}$ tiene características de pared de dominio, se ha desarrollado, partiendo de una métrica dinámica con factor conforme simétrico (ec (III.47)), un método para hallar nuevas soluciones al acoplamiento; para ello se utilizó el hecho de que la ecuación diferencial que proporciona el campo ϕ es del tipo Ricatti que, como se sabe, es una ecuación diferencial lineal de primer orden y segundo grado y, por lo tanto, debe tener dos soluciones. Así se logró obtener una sencilla relación que, en principio, permite, dada una solución conocida para algún campo ϕ , obtener la otra solución. Una vez obtenida esta solución queda el trabajo de determinar si la misma constituye o no una solución tipo pared de dominio.

Los resultados que se obtuvieron mostraron que la segunda solución hallada con el método que aquí se presenta, es decir g_2 , aplicado sobre la solución que es del tipo pared de dominio de la referencia [14], también es una pared de dominio y además, se pudo observar que la familia de soluciones tipo pared doble de la referencia [15] también conduce a una nueva familia de soluciones tipo pared de dominio. De igual manera se notó que la solución de Goetz produce otra solución pared de dominio para el valor $1/2$ del parámetro δ ; con esto se puede decir que, en general, parece ser que una solución del tipo pared de dominio gruesa

viene acompañada de otra solución que también es pared de dominio gruesa, para un determinado campo escalar y que, a esta nueva solución, le corresponde un potencial de autointeracción completamente diferente, lo cual garantiza que las nuevas soluciones no están conectadas con las soluciones particulares mediante una transformación global de coordenadas. Por otra parte, estas nuevas soluciones tienen como característica distintiva el hecho de que el espacio-tiempo resultante presenta una singularidad en el origen. Por tal razón a dichas soluciones se les ha denominado *paredes de dominio irregulares*.

En cuanto a las soluciones del tipo sine-Gordon, se ha visto que las mismas se pueden obtener como resultado de transformar el sistema de coordenadas, que originalmente está fijo a la pared, por uno nuevo que se mueve con respecto a la misma con una velocidad constante mediante un boost de Lorentz. Luego de la transformación de Lorentz la solución del tipo pared de dominio regular conduce a una ecuación de movimiento para el campo que semeja una ecuación de sine-Gordon generalizada a un espacio-tiempo curvo pues los potenciales de autointeracción son combinaciones de funciones seno y coseno. El análisis de estas ecuaciones y sus soluciones cae dentro del campo de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales y su estudio está más allá de los objetivos planteados en este trabajo.

Apéndice

La ecuación de sine-Gordon

La ecuación de sine-Gordon es una ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \text{sen } \phi, \quad (\text{A.1})$$

Donde una solución particular que en la literatura se le conoce como el “kink” es:

$$\phi(\xi, t) = 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{\xi - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right], \quad (\text{A.2})$$

siendo también otra solución el llamado “anti-kink”

$$\phi(\xi, t) = 4 \cot^{-1} \left[\exp \left(\frac{\xi - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right], \quad (\text{A.3})$$

Estas soluciones se denominan *ondas solitarias o solitones* y tienen tres características que las hacen dignas de estudio por si mismas [25]:

1. naturaleza localizada: la forma esta localizada en el sentido de que el *solitón* se hace constante (posiblemente cero) en el infinito y así también sus derivadas;
2. el *solitón* se propaga sin cambio en su forma, y

3. los solitones interactuando con otros solitones mantienen su forma original luego de la interacción

Son estas características *tipo-partícula* lo que hacen interesante estas soluciones de la ecuación de sine-Gordon en relación con este trabajo ya que proveen una motivación para analizar la posible relación que exista entre los dos sistemas.

Como se sabe de la mecánica cuántica, a medida que el tiempo transcurre hacia el infinito un paquete de ondas libre se expande indefinidamente y así, sólo durante un periodo de tiempo suficientemente pequeño será despreciable el ensanchamiento del paquete de ondas, y sólo entonces podrá éste representar a una partícula libre.

En la teoría de campos clásicos a una solución se le llama disipativa si ella da origen a una densidad de energía T_{00} que se anula luego de un tiempo infinitamente largo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_{00} = 0, \quad (\text{A.4})$$

Las soluciones no singulares con energía finita de las ecuaciones de campo libre tienen la propiedad de ser disipativas. Sin embargo, existen ecuaciones de campo clásicas no lineales que tienen soluciones no singulares que son no disipativas y, las más simples de estas soluciones, originan densidades de energía T_{00} que son independientes del tiempo, que semejan paquetes de ondas que tienen la particularidad de que no se expanden al pasar el tiempo; son éstos los solitones.

Estos “paquetes de energía” proveen un modelo para la descripción de objetos extendidos con energía finita tal como pudiera ser el límite clásico de un hadrón (ver por ejemplo la referencia [16])

Referencias bibliográficas

- [1] L. Randall y R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, (1999), 3370, hep-ph/9905221; ibid. **83**, (1999), 4690, hep-ph/9906064
- [2] Y.B. Zel'dovich, I.Y. Kobzarev y L.B. Okun, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67**, 3 (1974)[Sov. Phys. JETP **40**, 1 (1975)]
- [3] T.W.B. Kibble, J. Phys. **A9**, (1976), 1387
- [4] C.T. Hill, D.N. Schramm y J.N. Fry, Comments Nucl. Part. Phys. **19**, (1989), 25
- [5] L. M. Widrow, Phys. Rev., **D39**, (1989), 3571; ibid. **D39**, (1989), 3576; ibid. **D40**, (1989), 1002
- [6] A. Vilenkin, Phys. Rev., **D23**, (1981), 852 ; Phys. Lett. **B133**, (1983), 177
- [7] J. Ipser y P. Sikivie, Phys. Rev. **D30**, (1984), 712
- [8] G. Goetz, J. Math. Phys, **31**, (1990), 2683
- [9] R. Gass y M. Mukherjee, Phys. Rev., **D60**, (1999), 065011, gr-qc/9903012
- [10] V.A. Rubakov y M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **125B**, (1983), 136
- [11] N. R. Pantoja y H. Rago, Int. J. Mod. Phys. **D11** (2002), 1479, gr-qc/0009053
- [12] R. Utiyama, Phys. Rev., **101**, (1956), 1597

- [13] A. H. Taub, *Annals Math.*, **53**, (1953), 472
- [14] R. Guerrero, A. Melfo y N. Pantoja, *Phys. Rev.* **D65**, (2002), 125010, gr-qc/022011
- [15] A. Melfo, N. Pantoja y A. Skirzewski, *Phys. Rev.* **D67**, (2003), 105003, gr-qc/0211081
- [16] T.H.R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. London*, **A247**, (1958), 260; *ibid.* **A262**, (1961), 237
- [17] M. Cvetič, S. Griffies y H. Soleng, *Phys. Rev.*, **D48**, (1993), 2613, gr-qc/9306005
- [18] M. Gremm, *Phys. Lett.* **B478**, (2000), 434, hep-th/9912060
- [19] D. Bazeia, C. Furtado y A.R. Gomes, *JCAP* **0402**, (2004), 002, hep-th/0308034
- [20] D. Bazeia, J. Menezes y R. Menezes, *Phys. Rev.*, **91**, (2003), 241601, hep-th/0305234
- [21] M. Cvetič, S. Griffies y S. Rey, *Nucl. Phys.*, **B381**, (1992), 301, hep-th/9201007.
- [22] K. Skenderis y P.K. Townsend, *Phys. Lett.*, **B468**, (1999), 46, hep-th/9909070.
- [23] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser y A. Karch, *Phys. Rev.*, **D62**, (2000), 046008, hep-ph/9909134.
- [24] O. Castillo-Felisola, A. Melfo, N. Pantoja y A. Ramírez, *Phys. Rev.* **D70**, (2004), 104029, hep-th/0404083
- [25] D. Vvedensky, *Partial Differential Equations with Mathematica* (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1993)

- [26] L. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional* (Editorial Mir, Moscú, 1977)
- [27] B. Spain y M.G. Smith, *Functions of Mathematical Physics* (Van Nostrand Reinhold Company LTD, London, 1970)
- [28] A. Vilenkin y E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and other Topological Defects* (Cambridge University Press, New York, 1994)
- [29] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (2da. Edición, Institute of Physics Publishing, Bristol, 2003)